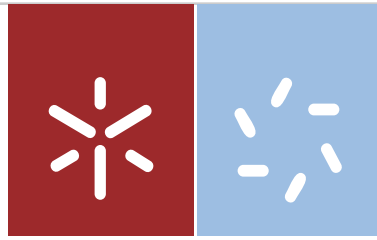


Universidade do Minho
Escola de Ciências

Mário Frengue Getimane

Sobre Matrizes Aleatórias e Suas Aplicações

Maio de 2010



Universidade do Minho
Escola de Ciências

Mário Frengue Getimane

Sobre Matrizes Aleatórias e Suas Aplicações

Tese de Doutoramento em Ciências
Área de Matemática

Trabalho efectuado sob a orientação do
Professor Doutor Ricardo Mendes Severino
Professor Doutor Carlos Correia Ramos

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTA TESE , APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE

Mário Frengue Getimane

Agradecimentos

Chegado o momento de expressar os meus agradecimentos por este trabalho fico com o receio de mencionar uns e deixar outros para trás, pois o mesmo só foi possível com a ajuda de muitas pessoas.

Mas antes de tudo quero agradecer a Deus , pois só Ele é que torna possíveis todas as coisas como o Criador.

A minha gratidão vai para os meus supervisores Prof. Ricardo Severino e Prof. Carlos Correia Ramos, pelo constante apoio aos meus estudos desde o início. A sua intervenção e orientação foram decisivas nos momentos cruciais deste trabalho, quando parecia que as dificuldades eram incontornáveis.

Não deixaria de usar esta oportunidade para agradecer à minha entidade empregadora, o Instituto Superior de Transportes e Comunicações (ISUTC) em Maputo, Moçambique, na pessoa do seu Reitor, Prof. André de Carvalho, pela confiança depositada em mim ao incluir-me no programa de formação, FORMAC, do ISUTC. O seu apoio e encorajamento, bem como de todos os colegas do ISUTC, foram fundamentais para se chegar ao ponto em que estamos hoje.

Por último, mas não o menor, não deixaria de usar este momento para recordar o Prof. Sousa Ramos, que me aceitou como seu aluno de doutoramento. Ele foi decisivo em todo este processo do meu doutoramento.

Finalmente os meus agradecimentos à minha família por todo o apoio que me prestaram ao longo deste trabalho, criando uma atmosfera agradável e favorável ao trabalho, cujo valor é incalculável. A ela um muito obrigado do fundo do meu coração.

Título da Tese: Sobre Matrizes Aleatórias e suas Aplicações

Aluno: Mário Frengue Getimane

resumo

Neste trabalho é estudada a função zeta de Artin-Mazur para as aplicações quadráticas no intervalo com invariante de amassamento aperiódico, usando a teoria das Cadeias de Markov Topológicas. Para tal, utilizamos a construção da matriz de Markov, introduzida por José Sousa Ramos, no início da década de 1980, no caso de uma partição do intervalo com um número infinito numerável de elementos, mas também, na prova do resultado mais importante, exploramos o formalismo da matriz Θ da dinâmica, formalismo introduzido também por José Sousa Ramos.

Thesis: On Random Matrix and its Applications

Student: Mário Frengue Getimane

abstract

In the present dissertation we study the zeta function for quadratic maps of the interval with aperiodic kneading invariant, using the Markov topological chain theory. We use the scheme, introduced by José Sousa Ramos, in the beginning of the 1980s, that allow us to get the Markov transition matrix of the dynamics in the case of a countable partition of the interval, but also, for the proof of our main theorem, of a matrix Θ formalism, also due to Sousa Ramos.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Sistemas dinâmicos	5
2.1	Conceitos básicos	5
2.2	Estruturas definidas no espaço de fases	9
2.3	Alguns invariantes topológicos numéricos	14
2.4	Equivalência de dinâmicas	20
3	Dinâmica simbólica	23
3.1	Sistemas dinâmicos simbólicos	24
3.2	Transformações β do intervalo	27
3.3	<i>Subshifts</i> do tipo finito	32
3.4	Classificação das cadeias de Markov topológicas	41
3.5	Representação simbólica de um sistema dinâmico	42
3.6	Teoria de Perron-Frobenius para matrizes de dimensão finita	47
3.7	Cadeias de Markov Topológicas infinitas numeráveis	49
3.8	Partições de Markov infinitas numeráveis	59
4	Dinâmica simbólica para aplicações no intervalo	63
4.1	Introdução	64
4.2	Teoria do amassamento para aplicações no intervalo	66
4.3	Algumas aplicações de Markov no intervalo	79
4.4	O formalismo da matriz Θ	84

5	Função zeta para aplicações no intervalo	91
5.1	A função zeta de uma aplicação quadrática no intervalo	94
5.2	O teorema fundamental	99
5.3	Taxa de <i>mixing</i> para a família das transformações β no intervalo	108
	Bibliografia	113

Capítulo 1

Introdução

Segundo Raghunathan, [107], a Matemática foi caracterizada por Gauss, um dos maiores matemáticos de todos os tempos, como "a rainha das Ciências".

Ainda no mesmo trabalho de Raghunathan lê-se que a abstração é uma qualidade característica da Matemática e é isso que faz dela presente em muitas outras áreas científicas e da actividade humana: a Matemática interage com a actividade comercial (através da aritmética na sua forma mais elementar como contagem, soma, diferença, multiplicação e divisão, como são usadas no mercado), com a Física, Engenharias, Biologia, Medicina, Ciências de Computação, Ciências Sociais e Economia.

O papel da Matemática e a sua importância na sociedade é testemunhado pela atenção que os diferentes países (os desenvolvidos e os que estão em vias de desenvolvimento) dão ao seu ensino e avaliação do grau de domínio da mesma pelos seus cidadãos.

Uma ilustração do papel da Matemática na resolução de problemas reais pode ser vista no relatório, de Março de 1998, do *National Science Foundation*, "*Report of the senior assessment panel of the international assessment of the U.S. mathematical sciences*" publicado no sítio <http://www.nsf.gov/pubs/1998/nsf9895>, que analisa a situação da Matemática nos Estados Unidos. Este relatório contém uma secção sobre o papel da Matemática na sociedade onde se pode ver um quadro com as contribuições da Matemática em alguns exemplos de aplicações ou problemas reais. Pode-se ver nesse quadro, por exemplo, que na análise e previsão de sismos a contribuição da Matemática vem de áreas como Estatística, Sistemas Dinâmicos/Turbulência e modelação no cont-

role dos processos.

A presente tese enquadra-se em Sistemas Dinâmicos, uma área da Matemática que tem como objectivo principal compreender a evolução a longo termo dos estados dum sistema governado por uma lei determinística descrevendo a transição dum estado para outro [110]. As situações de interesse para os Sistemas Dinâmicos são geralmente não lineares, o que conduz a um comportamento muito complicado mesmo numa situação em que a equação que o descreve é simples. Tome-se o exemplo da aplicação quadrática, que ilustra o tipo de comportamento que pode surgir num sistema dinâmico.

Historicamente, a origem dos sistemas dinâmicos atribui-se aos trabalhos de Poincaré, por volta de 1900, no domínio da Mecânica Celeste, em particular o famoso problema dos "três corpos". Poincaré introduziu a análise qualitativa do sistema de três corpos em vez de procurar obter uma solução específica do sistema. A análise qualitativa privilegia a estrutura e a descrição de todas as possíveis evoluções do sistema. Este aspecto foi retomado por vários matemáticos, entre os quais René Thom e Stephen Smale, nos anos 1960 e 1970 [17]. Um trabalho que descreve a história dos sistemas dinâmicos é o artigo de Philip Holmes, [57]

Como vimos atrás, os sistemas dinâmicos têm a sua origem na procura da resolução de um modelo de uma situação real, o problema dos "três corpos" da Física. Os sistemas dinâmicos constituem uma ferramenta para a descrição da evolução temporal de sistemas governados por equações determinísticas.

Devido a este facto os sistemas dinâmicos encontram aplicação na Economia, no estudo da dinâmica de populações, na investigação das mudanças climáticas, na previsão do tempo, só para citar alguns exemplos.

Dentro dos sistemas dinâmicos destacam-se os sistemas dinâmicos discretos, que são dados pela iteração sucessiva de uma função a partir de um estado do sistema (o estado inicial) e que resulta numa sucessão de estados, a chamada órbita do sistema.

Estes sistemas têm sido objecto de estudo intenso ao longo das últimas décadas pois, ao aliar uma extrema simplicidade formal a uma capacidade de gerar comportamentos complexos, estes sistemas formam naturalmente o alvo preferencial para analisar com

rigor algumas características comuns a muitas outras dinâmicas, como, por exemplo, os mecanismos que levam à transição de um comportamento simples para um comportamento complexo [127].

Neste nosso trabalho, centrado no estudo das dinâmicas discretas, a nossa atenção está focada no estudo da função zeta de certas aplicações no intervalo, combinando ferramentas da teoria do amassamento, da teoria das Cadeias de Markov Topológicas, através de uma construção introduzida por José Sousa Ramos, e ainda com o uso de um outro formalismo, por nós apelidado de formalismo da matriz Θ , também introduzido por José Sousa Ramos.

A tese organiza-se como segue: no Capítulo 2 são introduzidos os conceitos básicos da teoria dos sistemas dinâmicos, como a própria definição de um sistema dinâmico, a distinção de diferentes tipos de sistemas dinâmicos, a introdução de conceitos importantes como a entropia métrica e entropia topológica, e a sua relação através de um importante princípio variacional.

Este capítulo termina com uma breve introdução dos subshifts do tipo finito como um sistema dinâmico particular.

No Capítulo 3 introduzimos as ideias que estão na base das técnicas da Dinâmica Simbólica, começando com alguns exemplos de sistemas dinâmicos (puramente) simbólicos e avançando depois para a descrição da estratégia mais comum de passagem de um sistema dinâmico para um seu representante simbólico, através da construção de uma partição de Markov. Neste ponto é importante salientar as condições para que um sistema possa ter uma representação simbólica com base nas partições de Markov. A seguir apresenta-se a teoria de Perron-Frobenius sobre matrizes não-negativas para matrizes de dimensão finita e infinita numerável, uma ferramenta muito importante para a investigação das cadeias de Markov topológicas.

No Capítulo 4 é apresentado o tema principal da tese, o estudo das aplicações no intervalo. Aí, temos a oportunidade de introduzir, de forma breve, a teoria de amassamento e a construção de uma matriz de transição de Markov a partir do invariante de amassamento da dinâmica. Por fim, é apresentado o formalismo da matriz Θ de Sousa

Ramos.

O último capítulo aborda o estudo da função zeta para aplicações no intervalo. Naturalmente que o nosso interesse está no estudo da função zeta para aplicações quadráticas no intervalo, relativamente às quais fomos capazes de apresentar trabalho original. Esse teorema mostra como, também para as aplicações quadráticas no intervalo com um invariante de amassamento infinito aperiódico, a função zeta se relaciona com o determinante da matriz de transição de Markov a ele associado. Trata-se de uma generalização do caso finito e podemos dizer que de alguma forma resolve uma questão deixada em aberto por Milnor e Thurston. É importante sublinhar que este resultado é possível unicamente combinando a teoria das Cadeias de Markov Topológicas de dimensão infinita numeráveis, com o formalismo da matriz Θ de Sousa-Ramos. Por fim, os mesmos argumentos simbólicos permite-nos transportar um resultado obtido para a função zeta das transformações β no intervalo para os valores próprios da correspondente matriz de transição de Markov, o que se traduz num resultado dinamicamente muito interessante e que levanta questões que julgamos importantes para um trabalho futuro.

Capítulo 2

Sistemas dinâmicos

Sobretudo para fixar notações, vamos iniciar este trabalho por uma breve introdução à teoria dos sistemas dinâmicos, incluindo a sua definição abstracta e alguns dos conceitos básicos desta disciplina da Matemática.

2.1 Conceitos básicos

Um sistema dinâmico é um modelo da evolução ao longo do tempo de algo, durante o qual essa entidade vai ocupando um entre um determinado conjunto de estados. Dito assim, é óbvio que se trata dos temas mais importantes pelas suas aplicações. Alguns autores, ver, por exemplo, [16], dizem no entanto que os primeiros indícios da teoria moderna dos sistemas dinâmicos terá surgido em finais do século XIX, em conexão com o estudo do sistema solar. Hoje em dia, esta disciplina científica tem numerosas aplicações, não só em Física, mas também em áreas tão diversas como a Economia, a Biologia, a Meteorologia e muitas outras.

No que segue tomaremos como referência o trabalho de Sousa Ramos [132]. Passaremos à formulação matemática do conceito de sistema dinâmico.

Definição 2.1. *Um sistema dinâmico é um par (X, f) onde X é um conjunto qualquer, habitualmente chamado espaço de estados, e $f : X \rightarrow X$ é uma transformação de estados.*

Consoante o tipo de transformação que seja considerada, é habitual classificar os sistemas dinâmicos em dois tipos.

Definição 2.2. Um sistema dinâmico (X, f) diz-se discreto se a transformação em causa é obtida pela iteração de uma aplicação f .

Aqui adoptaremos a convenção usualmente aceite e escreveremos a n -ésima iteração de f como

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ vezes}}$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$, e assumiremos que $f^0 = \text{id}$.

Definição 2.3. Um sistema dinâmico (X, f) diz-se contínuo se a transformação em causa é uma família uniparamétrica $\{f^t : X \rightarrow X, t \in \mathbb{R}\}$, (ou $t \in \mathbb{R}_0^+$) que observa a condição $f^{t+s} = f^t \circ f^s$ e $f^0 = \text{id}$. O sistema dinâmico chama-se então um fluxo (semi-fluxo).

Uma vez que os resultados originais que serão apresentados neste nosso trabalho dizem respeito a sistemas dinâmicos discretos, é natural que a escolha dos temas nesta apresentação privilegie este tipo de dinâmicas. Assim sendo, vamos de imediato ilustrar a ideia de sistema dinâmico com alguns exemplos.

Exemplo 1. Consideremos a família a-um-parâmetro $f_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de aplicações definidas no intervalo unitário,

$$f_a(x) = ax(1-x),$$

onde o parâmetro a percorre o intervalo $(0, 4]$. Pela sua simplicidade, aliada ao facto de ainda assim terem a capacidade de desenvolver um comportamento complexo, estas aplicações quadráticas tiveram, e continuam a ter, um papel muito importante no desenvolvimento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Foi de facto uma grande surpresa constatar que as órbitas dos pontos $x \in [0, 1]$, obtidas pela sucessiva iteração de uma aplicação assim tão simples, poderiam ter propriedades interessantes.

Também bastante simples, mas igualmente importantes, são as chamadas rotações no círculo, que passamos a apresentar.

Exemplo 2. Consideremos a família α -um-parâmetro de aplicações $R_\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ do círculo, definidas, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, por

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}.$$

Estas aplicações são chamadas rotações do círculo. Como se verifica facilmente, escolhido um valor racional para o parâmetro α , suponhamos $\alpha = n/m$, com $p, q \in \mathbb{N}$, então, $R_\alpha^m = \text{Id}$. Deste modo, podemos concluir que, para essa escolha do parâmetro, a dinâmica de qualquer ponto de \mathbb{S}^1 é similar: após m instantes de tempo o sistema está de volta à sua configuração inicial.

Naturalmente que dinâmicas em espaços de dimensão superior a um são também muito interessantes. Contudo, como é fácil de antecipar, o seu estudo está muito condicionado pelas dificuldades que a saída da dimensão um costuma trazer. De seguida apresentaremos os chamados automorfismos lineares do toro.

Exemplo 3. Consideremos a família de sistemas dinâmicos dada pela aplicação linear $\phi_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, sobre o toro bidimensional, definida pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

com a, b, c, d quaisquer números reais. Neste caso, como facilmente se percebe, temos que a imagem da classe a que o ponto (x, y) pertence é a classe que contém o ponto $(ax + cy, bx + dy)$. Como vemos, aqui a transformação no espaço dos estados é obtida pela multiplicação à direita pela matriz A , vindo então a sucessão temporal de estados descrita pela sequência

$$((x, y), (x, y)A, (x, y)A^2, \dots, (x, y)A^n, \dots).$$

Tal como no caso das parábolas no intervalo do nosso primeiro exemplo, estas aplicações muito simples protagonizaram também um papel muito importante no estudo das dinâmicas em dimensão superior a 1.

Dado um sistema dinâmico discreto (X, f) , o problema fundamental consiste no conhecimento das diferentes dinâmicas admitidas por f a partir de pontos de X . É evidente

que, para os casos mais interessantes, nem todos os pontos de X partilham o mesmo tipo de comportamento ao longo do tempo, mas, ainda assim, deve ser possível identificar certos tipos de evolução temporal comuns não apenas para um determinado sistema dinâmico, mas sobretudo para a generalidade dos sistemas dinâmicos. O primeiro desses comportamentos regista a repetição de um ciclo.

Definição 2.4. *Dado um sistema dinâmico (X, f) , um ponto $x \in X$ diz-se um ponto fixo da dinâmica se $f(x) = x$.*

Por outras palavras, um ponto $x \in X$ diz-se um ponto fixo se a sua órbita $(f^k(x))$ for constituída unicamente por um ponto, o ponto x .

Definição 2.5. *Dado um sistema dinâmico (X, f) , um ponto $x \in X$ diz-se um ponto periódico da dinâmica se $f^k(x) = x$, para algum inteiro positivo k . O menor inteiro p que satisfaça a igualdade $f^p(x) = x$ denomina-se o período de x .*

Tal como no caso dos pontos fixos de uma dinâmica, também os seus pontos periódicos, de período p , têm órbitas muito características, uma vez que estas serão constituídas apenas por p pontos. Para terminar a identificação deste tipo de comportamento, vamos agora permitir que o ponto inicial não pertença ao ciclo que a sua órbita repete indefinidamente.

Definição 2.6. *Dado um sistema dinâmico (X, f) , um ponto $x \in X$ diz-se um ponto eventualmente fixo da dinâmica se existe um inteiro positivo i tal que $f(f^i(x)) = f^i(x)$. Analogamente, diremos que um ponto $x \in X$ é um ponto eventualmente periódico se existem inteiros positivos i, k tais que $f^k(f^i(x)) = f^i(x)$.*

Como vemos da definição acima, estes pontos eventualmente fixos e eventualmente periódicos não vão estar nos ciclos para onde as suas órbitas se dirigem, mas estas vão incluir necessariamente esses ciclos.

Classificados os modos de evolução temporal $(f^k(x))$ relacionados com a repetição de um ciclo, é habitual identificar tudo o resto sob o mesmo tipo.

Definição 2.7. Dado um sistema dinâmico (X, f) , um ponto $x \in X$ diz-se um ponto aperiódico se não existem inteiros $i, k \geq 0$ tais que $f^k(f^i(x)) = f^i(x)$.

Para terminar esta classificação de modos de evolução temporal de um ponto perante a iteração de uma aplicação, é ainda habitual distinguir os pontos cujas órbitas se aproximam de pontos fixos ou de ciclos, sem contudo os incluírem. Neste caso não estaremos a distinguir exactamente o tipo de órbita em causa, mas sim o facto desta se aproximar de um ponto fixo ou de um ciclo.

Definição 2.8. Consideremos um sistema dinâmico (X, f) e seja \bar{x} um seu ponto fixo. Então, um ponto $x \in X$ diz-se assintoticamente fixo se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = \bar{x}.$$

Para que não haja uma sobreposição entre os dois últimos conceitos, de ponto eventualmente fixo e ponto assintoticamente fixo, é habitual exigir que a igualdade $f^k(x) = \bar{x}$ não seja alcançada para nenhum k . Identificados os comportamentos mais habituais admitidos para os pontos de um sistema dinâmico, voltemos a nossa atenção de novo para os sistemas.

2.2 Estruturas definidas no espaço de fases

Dado um sistema dinâmico (X, f) , conforme a estrutura que o espaço X tiver, é possível distinguir os sistemas dinâmicos. Como veremos adiante, esta classificação, baseada na estrutura definida em X , implica, muitas vezes, formas distintas de estudar as dinâmicas. Sem querer esgotar todas as possibilidades, atentemos nos seguintes tipos de dinâmicas:

1. um sistema dinâmico diz-se mensurável, se (X, β, μ) é um espaço de medida e f preserva a medida μ ;
2. um sistema dinâmico diz-se topológico, se X é um espaço topológico compacto (embora em alguns casos se exija que seja um espaço de Hausdorff) e f é um homeomorfismo;

3. um sistema dinâmico diz-se diferenciável, se X é uma variedade compacta diferenciável e f é um difeomorfismo de X ;
4. um sistema dinâmico diz-se algébrico, se, por exemplo, X é um grupo abeliano compacto que é um espaço de probabilidade relativamente à medida de Haar sobre a σ -álgebra de Borel β e f é um automorfismo mensurável.

No que se segue vamos apresentar alguns conceitos importantes específicos de cada um destes sistemas dinâmicos.

Seja dado um sistema dinâmico $f : X \rightarrow X$ e seja (X, β, μ) um espaço de medida, com $\mu(X) < \infty$.

Definição 2.9. Uma medida μ diz-se invariante pela transformação f se, para todo o conjunto mensurável $E \subset X$, for verdadeira a igualdade

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)).$$

O seguinte teorema é extremamente útil para demonstrar a invariância de uma dada medida por uma transformação.

Teorema 2.1. Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação mensurável e μ uma medida finita sobre X . Suponhamos também que existe uma sub-álgebra geradora γ da σ -álgebra β de X , tal que, para todo o conjunto mensurável $E \in \gamma$, se tenha

$$\mu(E) = \mu(f^{-1}(E)).$$

Então, o mesmo vale para cada conjunto $E \in \beta$, ou seja, μ é invariante por f .

Este teorema diz-nos que, se a invariância é válida para uma álgebra geradora da σ -álgebra, então, ela é válida para toda σ -álgebra. O resultado seguinte caracteriza uma medida invariante.

Teorema 2.2. Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação e μ uma medida. Então, f preserva a medida μ , ou μ é invariante por f , se e somente se, para cada função integrável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, se tem a igualdade

$$\int \varphi d\mu = \int \varphi \circ f d\mu.$$

A questão da existência de medidas invariantes é respondida pelo seguinte teorema, habitualmente atribuído a Nikolai Krylov e Nikolai Bogoliubov.

Teorema 2.3. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação contínua num espaço métrico compacto. Então, existe pelo menos uma probabilidade invariante por f .*

Observação 2.1. *O mesmo resultado é válido para fluxos.*

No estudo dos sistemas dinâmicos há algumas propriedades de especial interesse pela sua importância na classificação dos mesmos, isto é, pela forma como auxiliam no problema de decidir se, num determinado sentido, dois sistemas dinâmicos devem ou não ser considerados diferentes. A seguir vamos considerar algumas dessas propriedades.

A seguinte definição introduz o conceito de transformação ergódica.

Definição 2.10. *Uma transformação $f : X \rightarrow X$ diz-se ergódica para uma medida de probabilidade invariante μ^1 , se, para toda a função μ -integrável $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, e para μ -quase todo $x \in X$, é válida a igualdade*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu$$

Para a caracterização da ergodicidade de f precisamos da seguinte definição.

Definição 2.11. *Um conjunto mensurável $A \subset X$ diz-se invariante se $f^{-1}A = A$. Uma função $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se invariante se $\psi \circ f = \psi$.*

O resultado que se segue caracteriza um sistema ergódico.

Teorema 2.4. *Seja μ uma probabilidade invariante de $f : X \rightarrow X$ mensurável. Temos então que as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *o sistema (f, μ) é ergódico;*
2. *para qualquer subconjunto A invariante temos que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$;*
3. *toda a função invariante ψ é constante num conjunto de medida total.*

¹Diz-se também que a medida μ é ergódica para f , ou que o sistema dinâmico (f, μ) é ergódico.

Da definição acima apresentada de dinâmica ergódica não é feita qualquer referência à possibilidade de existir mais do que uma medida de probabilidade invariante, mas alguns exemplos de sistemas dinâmicos existem que respondem afirmativamente a essa questão. Dessa forma, é pertinente perguntar quais os sistemas que são ergódicos mas apenas relativamente a uma única medida de probabilidade invariante.

Definição 2.12. *Uma transformação $f : X \rightarrow X$ diz-se unicamente ergódica se admite exactamente uma probabilidade invariante.*

O seguinte teorema vai apresentar uma caracterização das transformações unicamente ergódicas.

Teorema 2.5. *A transformação $f : X \rightarrow X$ é unicamente ergódica se e somente se, para toda a função contínua $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ e todo $x \in X$, se verifica a seguinte igualdade:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu$$

Pode-se mostrar que, se uma transformação é unicamente ergódica, então, a sua probabilidade invariante é ergódica.

No que se segue, vamos introduzir duas outras propriedades dos sistemas dinâmicos, nomeadamente, a transitividade e a propriedade de ser do tipo *mixing*². De notar que existem variações destas mesmas propriedades, tais como transitividade total, fracamente *mixing*, mas nós não as vamos introduzir aqui.

Definição 2.13. *Um sistema dinâmico topológico (X, f) diz-se transitivo se e somente se, para todos os conjuntos abertos U e V , existe $n \geq 0$ tal que, $f^{-n}U \cap V \neq \emptyset$.*

O resultado seguinte apresenta uma forma um pouco mais fácil, uma vez que passa pela existência de uma órbita com certas características, para se evidenciar que uma determinada dinâmica é transitiva.

Teorema 2.6. *Seja X um espaço métrico compacto sem qualquer ponto isolado e seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação contínua. Então, existe uma órbita densa se e somente se (X, f) é um sistema transitivo.*

²Que, por simplicidade, passaremos a escrever apenas *mixing*.

Como referimos anteriormente, uma outra das propriedades de interesse no estudo dos sistemas dinâmicos é a propriedade *mixing*. Daremos aqui a versão topológica e mensurável deste conceito.

Definição 2.14. *Seja (X, f) um sistema dinâmico topológico. Diz-se que este sistema é topologicamente mixing se, para quaisquer conjuntos abertos não-vazios U e V , existe um número inteiro N tal que, para todo $n \geq N$, se verifica $f^{-n}U \cap V \neq \emptyset$.*

O resultado seguinte estabelece uma hierarquia entre estes conceitos.

Teorema 2.7. *Seja (X, f) um sistema dinâmico topológico. Se o sistema (X, f) é mixing, então, ele é transitivo.*

Definição 2.15. *Seja f uma transformação que preserva a medida num espaço de probabilidade (X, α, μ) . A transformação f diz-se mixing se, para quaisquer A e $B \in \alpha$, se tem a igualdade*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

A relação entre estas duas propriedades, ergodicidade e *mixing*, é dada pelo seguinte resultado.

Teorema 2.8. *Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação que preserva a medida μ . Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. μ é ergódica;
2. para quaisquer conjuntos mensuráveis A e B , tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mu(f^{-i}A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

A partir deste resultado pode-se deduzir que uma transformação *mixing* é ergódica. Contudo, o inverso nem sempre é verdadeiro, isto é, uma transformação pode ser ergódica sem ser *mixing*. Um exemplo desta situação é exactamente a rotação irracional R_α no círculo unitário S^1 , um exemplo da família de dinâmicas no círculo apresentada anteriormente.

Observação 2.2. Em [132], Sousa Ramos, apresenta uma classificação abrangente dos sistemas ergódicos. Apesar de não termos abordado alguns dos tipos ali referidos, a sua importância leva-nos a, ainda assim, reproduzirmos aqui essa classificação:

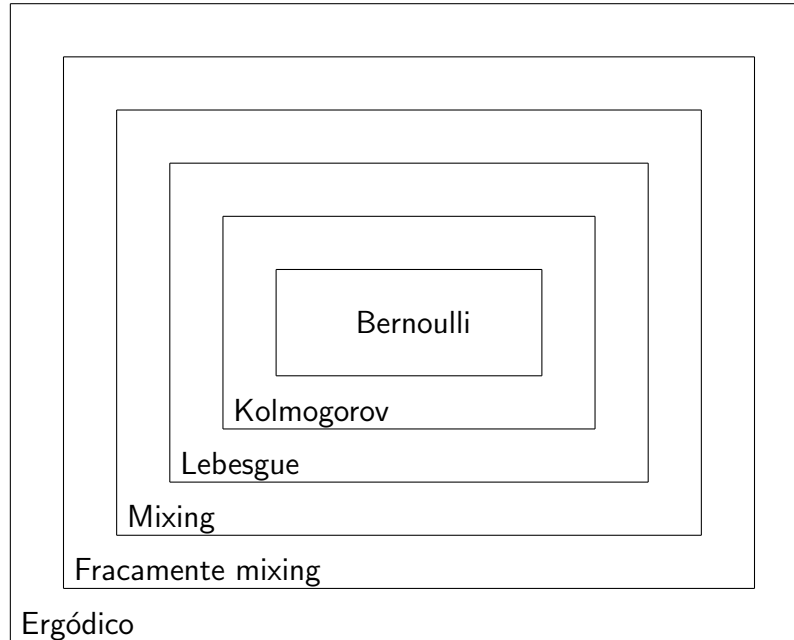


Figura 2.1: Hierarquia dos sistemas ergódicos

O teorema seguinte dá uma condição suficiente para uma transformação ser *mixing*.

Teorema 2.9. *Seja (X, α, μ) um espaço de medida, f uma transformação que preserva a medida μ e γ uma semi-álgebra que gera α . Se, para todo $A, B \in \gamma$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f^{-n}A \cap B) = \mu(A)\mu(B),$$

então, temos que μ é mixing.

2.3 Alguns invariantes topológicos numéricos

Como dissemos anteriormente, na classificação de dinâmicas usam-se propriedades, tais como a ergodicidade, o tipo *mixing*, etc., mas também grandezas numéricas. Entre essas grandezas numéricas a entropia³ tem um papel de grande destaque. Há vários

³Sobre a qual o trabalho de Anatole Katok, [61], contém importantes informações históricas.

tipos de entropia, mas nós vamos introduzir somente os conceitos de entropia métrica e de entropia topológica, conceitos que, como veremos adiante, estão relacionados por um princípio variacional.

Segundo Lai-Sang Young, [142], a entropia métrica foi introduzida por Andrei Kolmogorov, em 1959, o qual se terá inspirado na teoria de informação de Claude Shannon. Como preparação para a definição da entropia métrica, vamos de seguida introduzir alguma notação.

Seja (X, α, μ) um espaço probabilístico e $f : X \rightarrow X$ uma transformação que preserva a medida μ e consideremos uma partição $\nu = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ de X , i.e., tal que $X = \bigcup_{i=1}^k A_i$. Vamos denotar por $f^{-i}\nu$ o conjunto

$$f^{-i}\nu = \{f^{-i}A_1, f^{-i}A_2, \dots, f^{-i}A_k\}.$$

Se, dado um qualquer ponto $x \in X$, tivermos $x \in A_j$, diz-se que j é o ν -endereço de x . Por fim, dadas duas partições ν, η de X , vamos construir uma partição, $\nu \vee \eta$, dada por

$$\nu \vee \eta = \{A \cap B : A \in \nu, B \in \eta\}.$$

Definição 2.16. A entropia métrica de f , habitualmente denotada por $h_\mu(f)$, é definida como segue:

$$h_\mu(f) = \sup_{\nu} h_\mu(f, \nu),$$

onde

$$h_\mu(f, \nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\nu\right),$$

sendo

$$H(\nu) = H(\mu(A_1), \dots, \mu(A_k)) = - \sum_i \mu(A_i) \log \mu(A_i).$$

Observação 2.3. A grandeza $H(\nu)$, introduzida na definição acima, chama-se entropia da partição ν em relação à medida μ .

O cálculo da entropia é fácil no caso em que ν é uma partição geradora, pois, neste caso, o Teorema de Kolmogorov-Sinai garante-nos imediatamente que $h_\mu(f, \nu)$ não depende da escolha da partição, donde

$$h_\mu(f) = h_\mu(f, \nu).$$

Recorde-se que uma partição ν se diz geradora sempre que $\bigvee_{i=0}^{\infty} f^{-i}\nu$ gera a σ -álgebra α . Esta definição é para a situação em que f não é invertível, pois caso f seja invertível, então, ν é geradora sempre que $\bigvee_{i=-\infty}^{\infty} f^{-i}\nu$ gera a σ -álgebra α .

Para o cálculo da entropia métrica pode-se recorrer à fórmula introduzida por Michael Brin e Anatole Katok, [142], para a qual necessitamos da seguinte definição.

Definição 2.17. *A bola dinâmica de tamanho n e raio ε em torno de um ponto $x \in X$ é o conjunto $B(x, n, \varepsilon)$ dado por*

$$B(x, n, \varepsilon) = \{y \in X : d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon, \ i = 0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Sendo assim, podemos afirmar que:

Teorema 2.10. *Assuma-se que (f, μ) é ergódica. Então, para μ -quase todo $x \in X$ tem-se*

$$h_{\mu}(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B(x, n, \epsilon)) \right\}.$$

No que se segue, vamos continuar com o conceito de entropia, mas desta vez num enquadramento totalmente diferente.

A chamada entropia topológica foi introduzida por Roy Adler, Alan Konheim e Michael McAndrew, em 1965, [3], e baseia-se na noção de cobertura.

Definição 2.18. *Seja X um espaço métrico e α uma cobertura de X . O número da cobertura α é a grandeza*

$$N(\alpha) = \inf \{ \#\beta : \beta \subset \alpha \text{ é subcobertura de } X \}.$$

A entropia de α é então dada por

$$H(\alpha) = \log N(\alpha).$$

Vamos introduzir as seguintes notações: dadas duas coberturas α, β de um espaço métrico, seja

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}$$

e

$$\alpha^n = \alpha \vee f^{-1}\alpha \vee \dots \vee f^{-n+1}\alpha.$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.19. Dada uma função contínua $f : X \rightarrow X$, vamos chamar entropia de f em relação à cobertura α a

$$h(f, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\alpha^n).$$

A grandeza

$$h_{\text{top}}(f) = \sup\{h(f, \alpha) : \alpha \text{ é cobertura aberta finita de } X\}$$

chama-se entropia topológica de f .

De seguida, enunciamos alguns resultados sobre a entropia topológica.

Teorema 2.11. Seja β_n uma sequência de coberturas finitas tais que os seus diâmetros, $\text{diam } \beta_n$, tendem para zero, quando $n \rightarrow \infty$. Então,

$$h_{\text{top}}(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} h(f, \beta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(f, \beta_n).$$

Corolário 2.1. Se α é uma cobertura tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam } \alpha^n = 0$, então,

$$h_{\text{top}}(f) = h(f, \alpha).$$

Agora vamos introduzir a noção de entropia topológica com base no conjunto gerador.

Definição 2.20. Seja $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua no espaço métrico compacto (X, d) e seja $E \subset X$. Dados $\varepsilon > 0$ e um inteiro positivo n , dizemos que E é um (n, ε) -gerador de X , se

$$X = \bigcup_{x \in E} B(x, n, \varepsilon),$$

onde

$$B(x, n, \varepsilon) = \{y \in X : d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon, \ i = 0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Para cada par (n, ε) , consideremos o número

$$S(n, \varepsilon) = \inf \{\text{card } E : E \subset X \text{ é } (n, \varepsilon)\text{-gerador}\}$$

Teorema 2.12. *Nas condições anteriores, é válida a igualdade*

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S(n, \varepsilon).$$

De seguida vamos introduzir a noção de entropia topológica introduzida, de forma independente, por Rufus Bowen, em 1971, e Efim Dinaburg, um ano antes. Mas para tal precisaremos de introduzir primeiro a definição de conjunto (n, ε) -separado.

Definição 2.21. *Seja X um espaço métrico compacto. Para $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, diz-se que $E \subset X$ é um conjunto (n, ε) -separado se, para cada $x, y \in E$, existe i , satisfazendo $0 \leq i \leq n$, tal que*

$$d(f^i(x), f^i(y)) > \varepsilon.$$

Para cada par (n, ε) introduza-se a seguinte grandeza:

$$N(n, \varepsilon) = \sup \{\text{card } E : E \subset X \text{ é } (n, \varepsilon)\text{-separado}\}.$$

Então, é possível demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 2.13. *Nas condições anteriores, é válida a igualdade*

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(n, \varepsilon) \right\}.$$

Estes dois conceitos de entropia, métrica e topológica, apesar de introduzidos em contextos distintos, não estão de modo algum assim tão separados. A relação entre a entropia topológica e a entropia métrica é traduzida por um princípio variacional, descrito da forma que se segue.

Teorema 2.14. *Seja f uma função contínua sobre um espaço métrico compacto. Então, temos que*

$$h_{\text{top}}(f) = \sup_{\mu} \{h_{\mu}(f)\},$$

onde o supremo é calculado relativamente a todas as medidas de Borel probabilísticas invariantes em relação a f .

Como é natural, uma medida μ tal que $h_{\text{top}}(f) = h_\mu(f)$ diz-se uma medida maximal.

O conceito de entropia topológica é um caso particular de um conceito mais geral, chamado pressão topológica, que vamos introduzir a seguir.

Definição 2.22. *Seja $n \in \mathbb{N}$ e coloque-se*

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)),$$

onde $f : X \rightarrow X$, com X um compacto e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$. Dado um conjunto $C \subset X$, coloque-se

$$\varphi_n(C) = \max_{x \in C} \varphi_n(x).$$

Dada uma cobertura α de X , definimos a pressão de φ , com respeito à cobertura α , como

$$P(\varphi, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \inf_{\tau \subset \alpha^n} \left\{ \sum_{U \in \tau} e^{\varphi_n(U)} \right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as subcoberturas τ de α^n . A pressão $P(\varphi, f)$ de φ é o supremo dos valores de $P(\varphi, \alpha)$ em relação a todas as coberturas abertas de X , ou seja $P(\varphi, f) = \sup_{\alpha} P(\varphi, \alpha)$. A função φ chama-se potencial.

Tem-se o seguinte teorema.

Teorema 2.15. *Sejam $\varphi, \psi \in C^0(X)$ e $c \in \mathbb{R}$. Então, são válidas as seguintes afirmações:*

1. $P(0, f) = h_{\text{top}}(f)$;
2. $P(\varphi + c, f) = P(\varphi, f) + c$;
3. *suponhamos que existe uma função limitada $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi = \psi + u \circ f - u$ (diz-se que φ é cohomológica a ψ). Então, temos que $P(\varphi, f) = P(\psi, f)$.*

Como vimos anteriormente, é possível estabelecer um princípio variacional ligando a entropia topológica e a entropia métrica. Coloca-se então a questão de saber se existe

um princípio análogo para a pressão topológica. Para esse fim, vamos introduzir a noção de pressão de uma medida μ em relação a φ como sendo o número

$$P_\mu(\varphi) = h_\mu(f) + \int \varphi d\mu.$$

Tem-se então o seguinte princípio variacional.

Teorema 2.16. *Seja \mathfrak{S} o conjunto das probabilidades invariantes para uma transformação contínua $f : X \rightarrow X$ e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, onde X é um espaço compacto. Então,*

$$P(\varphi, f) = \sup_{\mu \in \mathfrak{S}} P_\mu(\varphi) = \sup_{\mu \in \mathfrak{S}} \left\{ h_\mu(f) + \int \varphi d\mu \right\}.$$

Definição 2.23. *Uma medida invariante μ_φ tal que*

$$h_{\mu_\varphi}(f) + \int \varphi d\mu_\varphi = P(\varphi, f)$$

diz-se um estado de equilíbrio para o potencial φ .

2.4 Equivalência de dinâmicas

Conforme foi dito anteriormente, um dos problemas da teoria dos sistemas dinâmicos é decidir se dois sistemas dinâmicos diferem ou não entre si. Para o estudo deste problema introduzem-se grandezas numéricas, características qualitativas ou estruturas algébricas, os chamados invariantes, em relação a isomorfismos entre sistemas dinâmicos. A seguinte definição foi retirada de [132].

Definição 2.24. *Sejam $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ funções contínuas dos espaços métricos X e Y . Dizemos que f é topologicamente equivalente a g se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, com $h \circ f = g \circ h$.*

Neste caso, diz-se também que f e g são topologicamente conjugados e que h é uma conjugação topológica entre f e g .

Observação 2.4. *Como facilmente se reconhece, a conjugação topológica preserva o número de pontos periódicos das dinâmicas em causa, uma vez que leva pontos periódicos*

de um sistema para pontos periódicos no outro sistema. Mais ainda, também a existência de órbitas densas é uma propriedade partilhada por dinâmicas conjugadas, uma vez que a conjugação topológica também leva qualquer ponto com uma órbita densa em um ponto com uma órbita densa no outro sistema.

Definição 2.25. *Sejam (X, α, μ) e (Y, β, ν) dois espaços de probabilidades e $f : X \rightarrow X$ e $g : Y \rightarrow Y$ transformações que preservam a medida. Diz-se que f é isomórfica, ou equivalente a g , se existem conjuntos $A \in \alpha$ e $B \in \beta$ tais que $\mu(A) = \nu(B) = 1$, $f(A) \subset A$, $g(B) \subset B$ e existe uma transformação $\varphi : A \rightarrow B$, que preserva a medida, isto é, tal que $\mu(\varphi^{-1}(C)) = \nu(C)$, para todo $C \subset B$ mensurável, com $\varphi f(x) = g\varphi(x)$, para todo $x \in A$.*

A análise das características de uma dinâmica pode ser uma tarefa extremamente complicada. Contudo, em certos casos, existe uma técnica que permite simplificar esse estudo de uma forma incrível. No capítulo que se segue, iremos abordar essa forma de estudar sistemas dinâmicos, apropriadamente chamada dinâmica simbólica.

Capítulo 3

Dinâmica simbólica

Actualmente, reconhece-se que a dinâmica simbólica teve a sua origem nos trabalhos de Jacques Hadamard e Hedlund Morse, ver [140]¹, como uma importante ferramenta para analisar sistemas dinâmicos, na medida em que se trata de uma perspectiva simplificadora da dinâmica em causa.

Os métodos usados em dinâmica simbólica têm-se desenvolvido ao longo do tempo e, já há algum tempo, esta conquistou um lugar próprio dentro desta área da Matemática, tendo-se tornado, inclusivé, uma área de grande actividade de investigação.

A ideia fundamental da dinâmica simbólica como técnica matemática passa por, dado um sistema dinâmico (X, f) , sermos capazes de particionar o espaço de fases X em regiões a serem visitadas pelo itinerário $f^n(x)$, para qualquer $x \in X$. A cada região é então associado um símbolo, escolhido de um alfabeto, e na órbita

$$\mathcal{O}_f(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}_0\}$$

substitui-se cada valor numérico f^n pelo correspondente símbolo da região visitada, resultando assim uma sequência infinita de símbolos do alfabeto. Desta forma, em lugar de estudarmos o conjunto de todas as órbitas admitidas pela dinâmica, vamos passar a estudar as correspondentes sequências de símbolos.

Para fixar a notação, vamos começar por introduzir as dinâmicas que resultam dessa estratégia simplificadora, ou seja, os sistemas dinâmicos (puramente) simbólicos.

¹Pensamos ser importante também o trabalho [24], uma vez que apresenta um ponto de vista um pouco diferente sobre a origem da dinâmica simbólica.

3.1 Sistemas dinâmicos simbólicos

Apesar da sua simplicidade, os sistemas dinâmicos (puramente) simbólicos assumem alguma importância na Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Consideremos um conjunto de n símbolos \mathcal{A} . Porque não tem importância que símbolos estamos a usar, mas apenas o seu número, é prática comum fazer

$$\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, n\}.$$

Este conjunto \mathcal{A} é chamado o alfabeto. Ao contrário dos outros sistemas, neste caso não é usual especificar uma transformação do alfabeto nele próprio, mas sim o conjunto de todas as órbitas, que neste caso são sequências de símbolos de \mathcal{A} , admitidos pela hipotética dinâmica, conjunto esse habitualmente denotado por $\Sigma \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Para auxiliar o estudo das dinâmicas deste tipo de sistemas, é habitual introduzir uma métrica no espaço das sequências simbólicas Σ a partir da seguinte métrica no alfabeto: para quaisquer símbolos $s_i, s_j \in \mathcal{A}$, vamos dizer que

$$d(s_i, s_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j, \end{cases}$$

isto é, $d(s_i, s_j) = 1 - \delta_{ij}$, onde por δ_{ij} se denota o habitual símbolo de Kronecker. Esta métrica determina uma topologia em \mathcal{A} e, nesta topologia, prova-se que \mathcal{A} é um espaço compacto. Assim sendo, o Teorema de Tychonoff diz-nos então que o espaço $\Sigma_n = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, de todas as sequências simbólicas de elementos de \mathcal{A} , é também compacto e que, para quaisquer elementos $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$, com $i = 1, 2, \dots$, pertencentes a Σ_n , a métrica

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - \delta_{x_i y_i}}{2^i},$$

gera a topologia em Σ_n .

Quando, no capítulo anterior, introduzimos os conceitos mais básicos de sistemas dinâmicos, distinguimos três tipos de órbita de pontos do sistema, isto é, três tipos diferentes de dinâmicas. Como vamos ver, não é de todo difícil trazer essa identificação para os sistemas dinâmicos (puramente) simbólicos, mas para isso necessitamos de in-

troduzir o conceito de aplicação deslocamento².

Definição 3.1. A aplicação $\sigma : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$ que a cada sequência $x = x_1x_2x_3 \cdots$ de Σ_n faz corresponder a sequência $\sigma(x) = x_2x_3 \cdots$ de Σ , chama-se aplicação deslocamento.

Como se entende facilmente, a aplicação sucessiva de σ corresponde à passagem do tempo, no sentido em que, se entendermos $x = x_1x_2 \cdots$ como uma dinâmica iniciada num certo instante $t = 0$, então, a sequência $\sigma^k(x)$ corresponde à dinâmica anterior passados k instantes de tempo.

De seguida vamos ver como é possível recuperar os comportamentos identificados anteriormente para este novo contexto.

Definição 3.2. Uma sequência $x \in \Sigma$ diz-se:

1. *periódica*, se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^p x = x$; ao menor inteiro que verifica esta propriedade chama-se período de x ;
2. *pre-periódica*, ou *eventualmente periódica*, se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^{k+p} x = \sigma^k x$, para algum $k \in \mathbb{N}$.
3. *aperiódica*, se não verifica nenhum dos dois casos anteriores.

Como vemos, aquilo que foi formalizado acima significa que uma dinâmica será considerada periódica sempre que for exactamente igual à dinâmica passados p instantes de tempo. Vejamos agora alguns exemplos de sistemas dinâmicos (puramente) simbólicos.

Exemplo 4. Consideremos o alfabeto com dois símbolos, $\mathcal{A} = \{1, 2\}$, e seja a dinâmica cujo conjunto de órbitas, Σ , é dado por quaisquer sequências dos símbolos 1 e 2, mas sem que o primeiro se repita. Como facilmente se constata, esta dinâmica admite um único ponto fixo, a sequência constante

$$22222 \cdots = (2)^\infty.$$

²Do inglês *shift*.

Por outro lado, a restrição indicada significa também que a dinâmica admite um único ciclo de período 3, ou seja, três órbitas periódicas de período 3, a saber,

$$\begin{aligned} 122122122 \cdots &= (122)^\infty, \\ 221221221 \cdots &= (221)^\infty, \\ 212212212 \cdots &= (212)^\infty. \end{aligned}$$

Também não é difícil apresentar um exemplo de uma dinâmica pertencente a Σ correspondente a um comportamento eventualmente periódico, neste caso, relativamente à única órbita periódica de período 2 admitida,

$$221222121212 \cdots = 221222(12)^\infty$$

O modo como é representada a órbita no lado direito da igualdade pretende destacar a primeira parte transiente, 221222, relativamente ao ciclo (12) que se segue e depois se repete indefinidamente. Para terminar, vamos mostrar que Σ tem também dinâmicas com comportamento aperiódico.

Consideremos a sequência de símbolos onde vamos ver aparecer subsequências de símbolos 2, de comprimento sucessivamente maior, separadas por um símbolo 1,

$$212212221222212222212 \cdots .$$

Pela sua construção, não existe qualquer dúvida que, não só esta dinâmica pertence a Σ , mas também que esta nunca revelará um comportamento periódico ou eventualmente periódico, sendo, por isso, uma dinâmica claramente aperiódica.

O sistema dinâmico considerado acima foi definido com base numa restrição que depende apenas do elemento da sequência simbólica imediatamente anterior. Contudo, é possível construir sistemas simbólicos mais complicados, sistemas em que a restrição que o caracteriza reclame a memória de um determinado número de símbolos.

Exemplo 5. Consideremos o sistema dinâmico das sequências de símbolos Σ do alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2, 3\}$ tal que, nenhuma sequência de Σ pode ter uma subsequência constante de comprimento igual a 10. Como podemos perceber pela sua definição, o critério para

decidir se uma determinada sequência de símbolos de \mathcal{A} pertence ou não a Σ pode passar por ser necessário recordar quais foram os nove símbolos anteriores a um determinado.

Como se verifica facilmente, este sistema não admite qualquer ponto fixo, mas, contrariamente ao exemplo anterior, todas as possibilidades de formar sequências periódicas, de período inferior a 10, com os três elementos de \mathcal{A} , são dinâmicas de Σ . Por outras palavras, este sistema admite seis dinâmicas periódicas de período 2, vinte e quatro de período 3, setenta e duas dinâmicas periódicas de período 4, etc..

De seguida passaremos a discutir a introdução de sistemas dinâmicos simbólicos como representantes mais simples de dinâmicas num espaço de fases X , introduzindo um caso muito especial, onde essas duas entidades, sistema dinâmico e o seu representante simbólico, são praticamente indistintas.

3.2 Transformações β do intervalo

Nesta secção vamos introduzir um tipo de dinâmicas no intervalo unitário que tem associado, de forma extremamente natural, um código simbólico. Trata-se das transformações β do intervalo, cujo estudo foi iniciado por Alfréd Rényi, [109], e William Parry, [96].

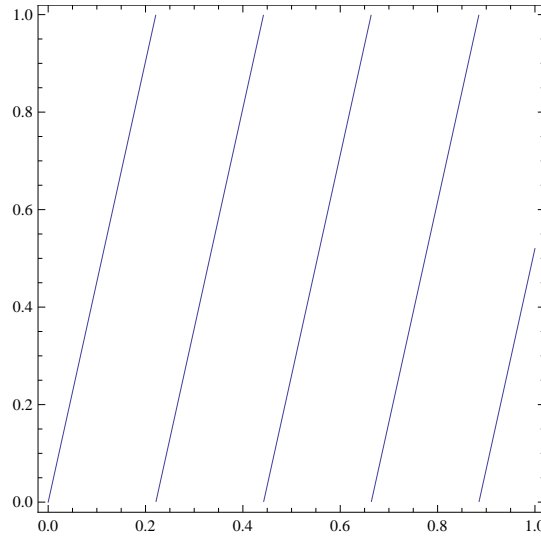
Uma transformação β do intervalo é uma generalização, para qualquer real $\beta > 1$, da representação de um número numa dada base, cujos exemplos mais conhecidos são a habitual expansão na base 10 e a expansão na base 2, esta última muito usada nos computadores. Como vamos poder ver já de seguida, a dinâmica de um ponto está intimamente ligada a uma sequência simbólica, definida a partir de uma codificação de certos subintervalos. Trata-se, portanto, de um não muito comum exemplo em que a escrita e a dinâmica do ponto inicial x_0 são basicamente a mesma. Segue-se a definição da transformação beta.

Definição 3.3. *Dado um qualquer número real $\beta > 1$, chama-se transformação β do intervalo unitário $[0, 1)$ à aplicação $f_\beta : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ que a todo $x \in [0, 1)$ faz corresponder $\beta x - \lfloor \beta x \rfloor$.*

Observação 3.1. Na expressão da transformação β por nós escolhida é usada a função $\lfloor x \rfloor$, que a todo x faz corresponder o maior inteiro menor que x . Uma forma equivalente de apresentar uma transformação β do intervalo unitário passa pela expressão

$$f_\beta(x) = \beta x \mod 1.$$

Como podemos concluir da sua definição, o gráfico de uma transformação beta consiste em $\lfloor \beta \rfloor + 1$ pedaços, cada um dos quais corresponde a um subintervalo de crescimento da função f_β . Na figura seguinte é representada a transformação para $\beta = 4.52$, sendo então visíveis os seus 5 subintervalos de monotonia.



A dinâmica simbólica da transformação beta está ligada a um *subshift* do *shift* completo relativo a um alfabeto com $\lfloor \beta \rfloor + 1$ símbolos. Coube a Parry, [96], a caracterização deste *subshift* ao descrever as sequências que dele fazem parte.

No caso das transformações β do intervalo, é habitual abrir uma exceção e apresentar o conjunto de todas as sequências escritas da seguinte forma:

$$\Sigma_{\lfloor \beta \rfloor} = \{0, 1, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}^{\mathbb{N}}.$$

A justificação para a escolha do símbolo 0 será evidente, já adiante.

Do conjunto $\Sigma_{\lfloor \beta \rfloor}$ vamos escolher os elementos dinamicamente significativos, isto é, aquelas sequências construídas a partir da órbita de algum ponto do intervalo. Por outras palavras, vamos considerar as sequências $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \in \Sigma_{\lfloor \beta \rfloor}$ tais que existe um

ponto $x \in [0, 1)$ cuja dinâmica satisfaz a igualdade

$$\varepsilon_k = \lfloor \beta f_\beta^{k-1}(x) \rfloor, \quad k \in \mathbb{N},$$

Cada uma destas sequências assim associada a um ponto x do intervalo $[0, 1)$, chama-se a β -expansão de x . Fixado um valor para β , vamos representar o conjunto das β -expansões dos pontos de $[0, 1)$ por $X_{\lfloor \beta \rfloor}$.

Observação 3.2. *Veja-se que a codificação proposta significa marcar os pontos de cada um dos $\lfloor \beta \rfloor + 1$ subintervalos de monotonia de f_β com um símbolo diferente, a começar em 0 e, naturalmente, a acabar em $\lfloor \beta \rfloor$.*

Observação 3.3. *É muito fácil concluir que a sequência formada unicamente pela repetição do símbolo 0 pertence a $X_{\lfloor \beta \rfloor}$, qualquer que seja a nossa escolha para β . Efectivamente, trata-se da sequência simbólica associada ao ponto $x = 0$.*

Consideremos a aplicação $\pi_\beta : \Sigma_{\lfloor \beta \rfloor} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\pi_\beta(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{\beta^k}.$$

De seguida vamos introduzir a função $d_\beta : [0, 1) \rightarrow X_{\lfloor \beta \rfloor}$ que a cada ponto x do intervalo $[0, 1)$ faz corresponder a sua β -expansão $\bar{\varepsilon}$. Note-se que estas duas aplicações satisfazem

$$\pi_\beta \circ d_\beta(x) = x, \quad x \in [0, 1).$$

Defina-se o shift completo σ sobre $\Sigma_{\lfloor \beta \rfloor}$:

$$\sigma : \Sigma_{\lfloor \beta \rfloor}^+ \rightarrow \Sigma_{\lfloor \beta \rfloor}$$

$$\sigma : (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots) \rightarrow (\varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots)$$

A restrição de σ ao conjunto $X_{\lfloor \beta \rfloor}$ está bem definida, pois $X_{\lfloor \beta \rfloor}$ é σ -invariante, ou seja, $\sigma(\bar{\varepsilon}) \in X_{\lfloor \beta \rfloor}$ para qualquer $\bar{\varepsilon} \in X_{\lfloor \beta \rfloor}$. Tem-se o seguinte resultado:

Teorema 3.1. *O sistema dinâmico $(X_{\lfloor \beta \rfloor}, \sigma)$ é semi-conjugado ao sistema $([0, 1), f_\beta)$.*

Por outras palavras, o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} [0, 1) & \xrightarrow{f_\beta} & [0, 1) \\ \pi_\beta \downarrow & & \downarrow \pi_\beta \\ X_{\lfloor \beta \rfloor} & \xrightarrow{\sigma} & X_{\lfloor \beta \rfloor} \end{array}$$

é comutativo, isto é $\pi_\beta \circ \sigma = f_\beta \circ \pi_\beta$.

Observação 3.4. Este resultado significa que as órbitas dos pontos do intervalo $[0, 1)$, sob a aplicação f_β , estão em correspondência unívoca com as sequências de $X_{[\beta]}$, sob a acção de σ .

Como dissemos já anteriormente, a caracterização das sequências de $X_{[\beta]}$ foi obtida por Parry, em [96]. Porque esta caracterização envolve o conceito de supremo lexicográfico, precisamos de algum trabalho preparatório. Começemos então por definir o conceito de ordem lexicográfica.

Definição 3.4. Dadas duas sequências $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots)$ e $\bar{\nu} = (\nu_1 \nu_2 \dots)$ de números inteiros, dizemos que $\bar{\varepsilon}$ é lexicograficamente menor que $\bar{\nu}$, e escrevemos $\bar{\varepsilon} <_{\text{lex}} \bar{\nu}$ se, e somente se, $\varepsilon_m < \nu_m$, com $m = \min\{k \in \mathbb{N} : \varepsilon_k \neq \nu_k\}$.

O resultado seguinte diz-nos que a habitual ordem sobre o intervalo $[0, 1)$ é preservada pela ordem lexicográfica.

Teorema 3.2. Sejam x, y dois números no intervalo $[0, 1)$ e $d_\beta(x), d_\beta(y)$ as respectivas β -expansões. Então, tem-se a seguinte equivalência:

$$x < y \iff d_\beta(x) <_{\text{lex}} d_\beta(y).$$

Por fim, necessitamos de estudar a representação do número 1. Como facilmente se observa, inclusivamente pelo gráfico da transformação $\beta = 4.52$ apresentado acima, a β -expansão do ponto $x = 1$ não é única, pelo que precisamos de nos deter um pouco mais sobre este caso. Para começar denotemos a β -expansão de 1 como se segue.

$$d_\beta(1) = \lfloor \beta f_\beta^{k-1}(1) \rfloor = \delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots \delta_k.$$

Como é natural, esta expansão pode ser finita ou infinita, de acordo com a seguinte convenção: vamos dizer que ela é finita se existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, todos os símbolos δ_k em $d_\beta(1) = \delta_1 \delta_2 \delta_3 \dots$ se anulam para $k \geq m + 1$; caso contrário, a expansão diz-se infinita.

Ainda antes de enunciarmos o teorema de Parry, é forçoso introduzir a seguinte notação: vamos representar por $\overline{\delta_1\delta_2\cdots\delta_m}$ a sequência que consiste na repetição³ infinita do conjunto $\delta_1\delta_2\cdots\delta_m$ de números inteiros. É válido o seguinte teorema.

Teorema 3.3. *Se $d_\beta(1)$ é uma sequência infinita, o supremo lexicográfico de $X_{[\beta]}$ é exactamente igual a $d_\beta(1)$. Caso contrário, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $d_\beta(1) = \delta_1\delta_2\cdots\delta_m\bar{0}$ e então o supremo lexicográfico de $X_{[\beta]}$ é igual a $\overline{\delta_1\delta_2\cdots\delta_m}$.*

Denotando por $\bar{\omega} = \omega_1\omega_2\omega_3\cdots$ o supremo lexicográfico de $X_{[\beta]}$, a descrição dos elementos de $X_{[\beta]}$ pode então ser dada pelo seguinte teorema, apresentado por Parry em [96].

Teorema 3.4. *Uma sequência $\bar{\varepsilon} \in \Sigma_{[\beta]}$ é a β -expansão de um número $x \in [0, 1)$ se e somente se*

$$\sigma^k(\bar{\varepsilon}) \leq_{\text{lex}} \bar{\omega}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Por outras palavras, os elementos do conjunto das β -expansões dos pontos do intervalo $[0, 1)$ permite a seguinte caracterização:

$$X_{[\beta]} = \{ \bar{\varepsilon} \in \Sigma_{[\beta]} : \sigma^k(\bar{\varepsilon}) \leq_{\text{lex}} \bar{\omega}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \}.$$

O problema da equivalência topológica das transformações β do intervalo foi já resolvido, tendo sido possível mostrar que a entropia topológica é, neste caso, um invariante completo. Por outras palavras, a entropia topológica vai distinguir as transformações β topologicamente não equivalentes. De seguida, apresentamos os dois resultados que respondem a essa questão.

Teorema 3.5. *A entropia topológica de uma transformação β do intervalo f_β é dada por*

$$h_{\text{top}}(f_\beta) = \log \beta.$$

Teorema 3.6. *Duas transformações β do intervalo $f_\beta, f_{\beta'}$ são topologicamente equivalentes se, e somente se, $\beta = \beta'$.*

³Ou seja, a concatenação sucessiva da sequência de m símbolos.

Observação 3.5. Em 1996, Leopold Flatto e Jeffrey C. Lagarias resolveram a questão da equivalência topológica para uma família de aplicações no intervalo, as chamadas transformações (β, α) do intervalo,

$$f_{\beta, \alpha}(x) = \beta x + \alpha \mod 1,$$

onde $\beta \in (1, 2]$, $\alpha \in [0, 1)$. Flatto e Lagarias mostraram então, [44], que duas transformações (β, α) do intervalo $f_{\beta, \alpha}, f_{\beta', \alpha'}$ são topologicamente equivalentes se, e somente se, são válidas as igualdades

$$\begin{aligned}\beta &= \beta' \\ \alpha &= 2 - \alpha' - \beta' .\end{aligned}$$

Uma certa classe de sistemas dinâmicos (puramente) simbólicos permite uma caracterização algébrica das suas dinâmicas, o que implicou imediatamente a possibilidade de utilização de técnicas bastante elaboradas. Por isso, esses sistemas ocupam um lugar de grande destaque.

3.3 Subshifts do tipo finito

Como se compreende facilmente, tornou-se habitual designar o sistema dinâmico (puramente) simbólico (Σ_n, σ) de todas as sequências de símbolos do alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, n\}$ por *shift* completo⁴. Se se restringir a aplicação σ a um subconjunto Σ de Σ_n , fechado e σ -invariante, isto é, tal que, para todo $x \in \Sigma$, se tenha $\sigma(x) \in \Sigma$, dizemos que o sistema dinâmico (Σ, σ) é um *subshift*.

Dentro da classe dos *subshifts*, destacam-se os *subshifts* do tipo finito⁵, ou as cadeias de Markov topológicas, assim designados devido à sua analogia com as cadeias de Markov probabilísticas. Essa importância vem do facto destes sistemas dinâmicos terem associado uma matriz que, descrevendo todas as transições possíveis entre símbolos do alfabeto, permite responder às questões mais importantes relacionadas com as dinâmicas admissíveis, usando métodos algébricos.

⁴Do inglês *full shift*.

⁵Do inglês, *subshifts of finite type*.

A importância dos *subshifts* do tipo finito deriva não só do seu valor intrínseco como sistemas dinâmicos que têm problemas próprios, mas também da sua aplicação no estudo de outros sistemas dinâmicos mais gerais, através de técnicas que serão descritas no próximo capítulo. Podemos mesmo dizer que alguns resultados fundamentais dos sistemas dinâmicos foram conseguidos primeiro para *subshifts* do tipo finito e só depois estendidos para outros sistemas dinâmicos. Vejamos então o que são os *subshifts* do tipo finito.

Fixemos um alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, n\}$ e seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n , de elementos em $\{0, 1\}$. Consideremos o seguinte conjunto de sequências de símbolos de \mathcal{A} :

$$X_A = \{x = (x_i) \in \Sigma_n : a_{x_i x_{i+1}} = 1, \quad i \in \mathbb{N}\}.$$

Um argumento muito simples permite mostrar que X_A é σ -invariante, uma vez que os critérios de admissibilidade de uma determinada sequência $x \in X_A$ são naturalmente herdados pela sequência $\sigma(x)$, validando assim a sua inclusão em X_A .

Definição 3.5. *Seja $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, n\}$ um alfabeto e $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n , de elementos em $\{0, 1\}$. Chama-se *subshift do tipo finito* ao sistema dinâmico simbólico (X_A, σ) , com*

$$X_A = \{x = (x_i) \in \Sigma_n : a_{x_i x_{i+1}} = 1, \quad i \in \mathbb{N}\}.$$

Para salientar o modo como a matriz A condiciona as dinâmicas de X_A , diz-se que A é a matriz de transição de (X_A, σ) .

É costume associar à matriz A um grafo cujos vértices são os elementos do alfabeto \mathcal{A} e onde as suas arestas são determinadas pelo seguinte: existe uma aresta a ligar dois vértices $i, j \in \mathcal{A}$ se e somente se $a_{ij} = 1$. Nesse sentido, uma dinâmica de (X_A, σ) não é mais que um caminho de comprimento infinito no grafo dirigido.

Nesta ocasião pensamos ser útil determo-nos um pouco sobre o conceito de *subshift* do tipo finito, particularmente a palavra *finito*. Para tal precisamos do conceito de palavra admissível para um *subshift* do tipo finito.

Definição 3.6. Uma sequência de símbolos $[i_0 \cdots i_{k-1}]$, onde cada $i_j \in \mathcal{A}$, chama-se palavra admissível de comprimento k para o subshift do tipo finito (X_A, σ) se

$$a_{i_\ell, i_{\ell+1}} = 1,$$

para $\ell = 0, \dots, k-2$.

Relembrando a sua definição, podemos concluir facilmente que para um *subshift* do tipo finito (X_A, σ) o número de palavras proibidas em sequências de X_A é sempre em número finito, daí a sua caracterização como de tipo finito. Damos de seguida um primeiro exemplo de *subshift* do tipo finito para logo depois vermos um exemplo de um sistema simbólico que não é um *subshift* do tipo finito.

Exemplo 6. Consideremos o alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ e a matriz de transição

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, $X_A \subset \Sigma_2$, onde a matriz das transições nos revela de imediato que é possível passar do símbolo 1 para o símbolo 2, e vice-versa, e do símbolo 2 para si próprio. Por outras palavras, só não é possível passar de um símbolo 1 para um símbolo 2, uma vez que $a_{12} = 0$. Consta-se assim que este sistema é exactamente aquele anteriormente apresentado no Exemplo 4.

Um exemplo de um *subshift* que não é do tipo finito é o chamado *sistema par*, introduzido por Benjamin Weiss, em 1973.

Exemplo 7. Consideremos o alfabeto $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ e o conjunto $\Sigma \subset \Sigma_2$ das sequências obtidas pela exclusão de palavras da forma $21 \cdots 12$, onde o número de símbolos 1 na palavra é ímpar. Como facilmente se percebe, o número de palavras proibidas neste sistema não é finito, logo, estamos perante um sistema que claramente não é um *subshift* de tipo finito.

Dado que no estudo dos *subshifts* de tipo finito, ou das Cadeias de Markov Topológicas, aparecem conceitos cuja origem remonta à teoria das Cadeias de Markov Probabilísticas,

achamos interessante fazer uma pequena incursão por esta última, por forma a dar alguma perspectiva aos conceitos que introduziremos depois.

Um processo de Markov é um processo estocástico $\{X_t\}$ que satisfaz à propriedade markoviana descrita como

$$P(X_{t+1} = j \mid X_0 = k_0, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i) = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i),$$

para todo $t = 0, 1, \dots$ e quaisquer estados $i, j, k_0, \dots, k_{t-1}$. As probabilidades condicionais $P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)$ são chamadas probabilidades de transição do estado i para o estado j e, no caso em que, para todo i , se verifica

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i),$$

diz-se que as probabilidades de transição são estacionárias, denotando-se então simplesmente por p_{ij} .

De forma análoga, caso se tenha as igualdades

$$P(X_{t+n} = j \mid X_t = i) = P(X_n = j \mid X_0 = i),$$

para $t = 0, 1, 2, \dots$, estaremos uma vez mais na presença de probabilidades de transição estacionárias, mas agora do estado i para o estado j , em n -passos. Estas probabilidades denotam-se habitualmente por $p_{ij}^{(n)}$.

Agora podemos introduzir a definição de uma Cadeia de Markov Probabilística.

Definição 3.7. *Um processo estocástico $\{X_t\}$ diz-se uma Cadeia de Markov Probabilística com um número finito de estados, se*

1. *tem um número finito de estados;*
2. *é válida a propriedade markoviana;*
3. *as suas probabilidades de transição são estacionárias;*
4. *está definido um conjunto de probabilidades (iniciais) $P\{X_0 = i\}$, para todos os estados i .*

Supondo que o número dos estados é igual a m , podemos construir uma matriz $P = (p_{ij})$ quadrada, de ordem m , com as probabilidades de transição p_{ij} , matriz que é habitual designar por matriz de transição da Cadeia de Markov Probabilística. Pela forma como é construída, sabemos que qualquer elemento nulo de P estabelece que uma dada transição é um acontecimento impossível. Mas mais do que isso, uma vez que, ainda por definição, a transição de um estado qualquer para um outro é um acontecimento certo, pelo que a soma dos elementos de cada uma das linhas da matriz P é necessariamente igual a 1. Resumindo, a matriz de transição de uma Cadeia de Markov Probabilística tem dois tipos de elementos: aqueles que sendo nulos indicam uma impossibilidade, e todos os outros que, por seu turno, estão limitados pela probabilidade exactamente igual a um do acontecimento certo. Estes dois aspectos registam o que ambos os tipos de cadeias de Markov têm de comum e de diferente: um elemento nulo em qualquer das matrizes de transição marca uma impossibilidade, mas não existe qualquer restrição à soma por linhas dos valores da matriz no caso topológico. Por isso, neste caso, um valor diferente de zero de um elemento da matriz, escolhido então por simplicidade igual a 1, regista apenas uma possibilidade de transição, não estabelecendo assim qualquer diferença entre as possibilidades de transição.

De forma análoga, podemos construir uma matriz quadrada, ainda de ordem m , a partir das probabilidades de transição em n passos, $P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$, a chamada matriz de transição em n passos.

Um dos aspectos mais importantes da teoria das Cadeias de Markov Probabilísticas passa por uma diferenciação do comportamento dos seus estados. De seguida, vamos introduzir uma classificação dos estados de uma Cadeia de Markov Probabilística onde, naturalmente, a matriz de transição da cadeia vai assumir um papel fundamental.

O conceito de acessibilidade de um estado a partir de um outro ajuda a compreender a noção de matriz irredutível. Assim, vamos introduzir a seguinte definição.

Definição 3.8. *Um estado j diz-se acessível a partir de um estado i se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$.*

Se um estado i é acessível a partir de um estado j e, simultaneamente, esse mesmo estado j é acessível a partir do estado i , diz-se que os dois estados comunicam entre si. É possível provar que a relação "o estado i comunica com o estado j " é uma relação de equivalência no conjunto dos estados da cadeia de Markov e particiona este em classes de equivalência.

Definição 3.9. *Seja $\{X_t\}$ uma Cadeia de Markov Probabilística, com probabilidades de transição p_{ij} . Então,*

1. *um estado i diz-se absorvente, se $p_{ii} = 1$;*
2. *o maior divisor comum d_i de todos os $n \in \mathbb{N}$ tais que $p_{ii}^{(n)} > 0$, chama-se período do estado i .*

Observação 3.6. *Uma vez que a soma por linhas dos elementos da matriz de transição é necessariamente igual a 1, temos que um elemento $p_{ii} = 1$ imediatamente significa que são nulos todos os outros da linha i . Deste modo, a única transição possível a partir do estado i é o mesmo estado i , daí a designação estado absorvente.*

Observação 3.7. *Como sabemos, caso se tenha $p_{ii}^{(n)} > 0$ podemos concluir que é possível voltar ao estado i , pouco importando o caminho, em n passos, assim como em $2n, 3n, \dots$ passos. Deste modo, o maior divisor comum de todos os naturais k que satisfazem $p_{ii}^{(k)} > 0$ diz-nos qual o comprimento do menor caminho que nos permite sair do estado i e a ele voltar, sendo assim natural a designação período do estado i .*

Definição 3.10. *Seja $\{X_t\}$ uma Cadeia de Markov Probabilística, com probabilidades de transição p_{ij} . Se $d_i = 1$, para todo $i = 1, \dots, m$, então, diz-se que a Cadeia de Markov Probabilística é aperiódica.*

Agora vamos introduzir um importante conceito no contexto das Cadeias de Markov Probabilísticas.

Definição 3.11. *Uma Cadeia de Markov Probabilística $\{X_t\}$ diz-se irredutível se o seu conjunto de estados consiste numa só classe de comunicação.*

Observação 3.8. *Uma condição suficiente para que todos os estados comuniquem entre si é a existência de um valor $N \in \mathbb{N}$, que não depende de i , nem de j , tal que $p_{ij}^{(n)} > 0$, para todo $n > N$.*

Os estados de uma Cadeia de Markov Probabilística podem ser ainda caracterizados em termos de recorrência, mas para tal precisamos de introduzir algumas notações.

Consideremos as seguintes grandezas:

$$f_{ij}^{(n)} = P \{X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j \mid X_0 = i\}, \quad n \geq 2$$

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

Como podemos facilmente perceber, estas grandezas, $f_{ij}^{(n)}$, são as probabilidades que o sistema, partindo do estado i , visite o estado j pela primeira vez no instante n e nunca antes. Por fim, a partir desta última, podemos introduzir a grandeza

$$f_{ii}^* = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}.$$

Então, temos que:

Definição 3.12. *Um estado i de uma Cadeia de Markov Probabilística diz-se recorrente se o processo, começando em i , retorna ao mesmo estado i com probabilidade igual a 1, ou seja, se $f_{ii}^* = 1$. Caso $f_{ii}^* < 1$, então o estado i diz-se transiente.*

O seguinte teorema caracteriza a recorrência e a transiência em termos das probabilidades de transição $p_{ii}^{(n)}$. Mas, ainda antes, seja

$$Q_{ij} = P \{X_m = j \text{ para um número infinito de } m's \mid X_0 = i\}.$$

Teorema 3.7. *Se um estado i de uma Cadeia de Markov Probabilística é recorrente, então, temos que $Q_{ii} = 1$, ou seja,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Por outro lado, se o estado i é transiente, então, temos que $Q_{ii} = 0$, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty.$$

No caso em que o estado i é recorrente tem-se $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$. Isto significa que os $f_{ii}^{(n)}$ definem uma distribuição de probabilidades para a variável aleatória "tempo do primeiro retorno ao estado i " com valores em \mathbb{N} . Para esta variável pode-se calcular a correspondente esperança matemática

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}.$$

Definição 3.13. Um estado recorrente i diz-se recorrente positivo se

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} < \infty$$

e recorrente nulo se

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Se todos os estados de uma Cadeia de Markov Probabilística forem recorrentes positivos então, a cadeia diz-se recorrente positiva e, no caso em que todos os estados sejam recorrentes nulos, a cadeia chama-se recorrente nula.

Teorema 3.8. Um estado recorrente i de uma Cadeia de Markov Probabilística é recorrente nulo se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$.

Esta foi a breve apresentação das Cadeias de Markov Probabilísticas que nos pareceu interessante recordar antes de apresentar os conceitos equivalentes no contexto das Cadeias de Markov Topológicas, isto é, onde os elementos da matriz de transição não expressam probabilidades de acontecimentos mas algo muito mais simples, apenas uma possibilidade de ocorrência.

Consideremos um *subshift* do tipo finito (X_A, σ) , com $A = (a_{ij})$ a sua matriz de transição.

Definição 3.14. Uma matriz $A = (a_{ij})$ quadrada, de ordem n , com $a_{ij} \geq 0$, para cada i e j , chama-se:

1. *irredutível*, se para cada par (i, j) existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_{ij}^{(n)} > 0$, onde por $a_{ij}^{(n)}$ se denota o elemento (i, j) da matriz A^n ;

2. *primitiva, ou aperiódica, se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_{ij}^{(n)} > 0$, para todo o $n > N$, para quaisquer i, j .*

Definição 3.15. *Seja dada uma matriz $A = (a_{ij})$ quadrada, de ordem n , com $a_{ij} \geq 0$.*

Para um índice i fixo defina-se a grandeza

$$p(i) = \text{mdc} \left\{ \ell : a_{ii}^{(\ell)} > 0 \right\}.$$

O número $p(i)$ chama-se período do índice i .

Como facilmente se reconhece, caso a matriz A seja uma matriz irredutível, tem-se que o período $p(i)$ não depende do índice i , isto é, $p = p(i)$ é o mesmo para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Sendo assim, diz-se que $p = p(i)$ é o período da matriz A . Note-se também que, de acordo com a definição acima apresentada, uma matriz primitiva é uma matriz irredutível de período 1.

Como foi anunciado logo na sua apresentação, para os *subshifts* do tipo finito é muito fácil estabelecer uma relação entre a sua dinâmica e características da sua matriz de transição. Esse resultado é expresso pelo seguinte teorema:

Teorema 3.9. *Seja A a matriz de transição de um subshift do tipo finito (X_A, σ) .*

Então, temos que:

1. *o sistema (X_A, σ) é transitivo se, e somente se, a matriz A é irredutível;*
2. *o sistema (X_A, σ) é topologicamente mixing se, e somente se, a matriz A é primitiva.*

Uma generalização natural dos *shifts* obtém-se quando se consideram sistemas dinâmicos simbólicos relativamente a um alfabeto \mathcal{A} com um número infinito numerável de símbolos. Estes sistemas dinâmicos simbólicos, com um alfabeto infinito numerável, que ainda serão introduzidos num outro capítulo, têm a sua importância no estudo de dinâmicas parcialmente hiperbólicas, por exemplo.

3.4 Classificação das cadeias de Markov topológicas

Como afirmámos no final do capítulo anterior, um problema fundamental no estudo de uma classe de sistemas dinâmicos passa pela identificação daquelas que são dinamicamente equivalentes.

A classificação das Cadeias de Markov Topológicas (X_A, σ) teve o seu início com o trabalho *Classification of subshifts of finite type*, publicado em 1973, por R. Williams, [139]. Para tal, Williams começou por introduzir uma relação de equivalência entre matrizes inteiras, não negativas.

Definição 3.16. *Sejam A e B matrizes inteiras, não negativas. Então A e B dizem-se fortemente equivalentes shift se existirem matrizes inteiras, não-negativas U_1, \dots, U_k e V_1, \dots, V_k , para as quais é satisfeita a seguinte cadeia de igualdades:*

$$\begin{aligned} A &= U_1 V_1; \\ V_1 U_1 &= U_2 V_2; \\ &\vdots \\ V_{k-1} U_{k-1} &= U_k V_k; \\ V_k U_k &= B. \end{aligned}$$

Por fim, mostrou que esta relação entre matrizes correspondia à classificação topológica das cadeias de Markov topológicas, provando o seguinte resultado.

Teorema 3.10. *Duas Cadeias de Markov Topológicas $(X_A, \sigma), (X_B, \sigma)$ são topologicamente equivalentes se, e somente se, as correspondentes matrizes de transição A e B são fortemente equivalentes shift.*

Contudo, tendo imediatamente a percepção da dificuldade que a arbitrariedade de k introduz na capacidade de decidir se duas cadeias de Markov topológicas são, ou não, efectivamente topologicamente equivalentes, Williams introduziu, ainda no mesmo trabalho, uma segunda relação de equivalência entre matrizes inteiras, não negativas, esta sim, computacionalmente muito mais atraente.

Definição 3.17. *Dadas duas matrizes A e B inteiras, não negativas, diremos que A e B são matrizes equivalentes shift, de lag ℓ se, e somente se, existirem matrizes inteiras,*

não negativas U e V para as quais sejam válidas as seguintes igualdades:

$$U A = B U ;$$

$$A V = V B ;$$

$$U V = B^\ell$$

$$V U = A^\ell .$$

Na altura, Williams mostrou que quaisquer duas matrizes fortemente equivalentes *shift* são necessariamente matrizes equivalentes *shift*, adiantando então como conjectura que o recíproco seria igualmente verdadeiro, isto é, que a equivalência *shift* de matrizes seria também uma relação correspondente à conjugação topológica das cadeias de Markov topológicas. Como é fácil de perceber, esta importante conjectura suscitou um grande interesse e, após quase duas décadas, K. Kim e F. Roush colocaram um ponto final na questão, apresentando um exemplo que invalida inequivocamente o resultado adiantado por Williams. Contudo, a não validade da conjectura de Williams não deve significar, de modo algum, que a relação de equivalência *shift* entre matrizes inteiras, não-negativas, tenha perdido todo o seu interesse. De facto, sendo uma relação decidível, como também o mostraram Kim e Roush, em [63], e estando necessariamente muito próxima da equivalência topológica⁶, podemos afirmar que a equivalência *shift* constitui, sem qualquer dúvida, uma boa base de trabalho para classificar estes sistemas simbólicos.

Na secção que se segue vamos apresentar uma estratégia que, em alguns casos, permite construir uma representação simbólica das órbitas dos pontos de uma dinâmica e, dessa forma, permitir uma simplificação importante do estudo da dinâmica.

3.5 Representação simbólica de um sistema dinâmico

Para se passar de um sistema dinâmico (X, f) para um sistema simbólico representativo do mesmo, é preciso construir uma partição do espaço de fases X com propriedades muito especiais. Parafraseando Roy Adler, [2], as questões fundamentais podem ser

⁶Bastará recordarmos as dificuldades encontradas, ao longo de todos estes anos, na busca de exemplos que negassem a conjectura de Williams para sentirmos essa aproximação.

colocadas do seguinte modo: *como, e até que ponto, pode um sistema dinâmico ser representado por um sistema simbólico*⁷? Neste trabalho não iremos acompanhar as diferentes respostas que têm sido propostas a estas questões, mas apenas seguir com algum pormenor uma estratégia relativamente à qual se tem o seguinte: prova-se que, quando o espaço de fases de um sistema dinâmico (X, f) admite uma partição de Markov, que adiante estudaremos em pormenor, então este pode ser representado por um *subshift* do tipo finito (X_A, σ) ⁸.

Segundo [2], desde muito cedo que esta ideia de substituir o estudo de uma dinâmica (X, f) por um sistema simbólico que a representasse foi posta em prática. De facto, terá talvez sido K. Berg, em 1967, [126], o primeiro a descobrir a importância de uma partição com certas características, a partir de então designada por partição de Markov, quando, no seu trabalho de doutoramento, construiu este tipo de partição no estudo dos automorfismos hiperbólicos do toro bidimensional, para, pouco tempo depois, em 1968, também Ya. Sinai, [129] e [128], surgir a construir partições de Markov para estudar difeomorfismos de Anosov.

Já na década de 1970, Rufus Bowen, nos seus dois trabalhos [10] e [11], constrói igualmente partições de Markov para difeomorfismos do tipo Axioma A. Por outro lado, a construção de partições de Markov para pseudo difeomorfismos de Anosov, aplicações introduzidas por William Thurston, foi efectuada por Albert Fathi e Michael Shub, no seu trabalho [40].

De uma forma geral, podemos dizer que esses trabalhos mostraram sobretudo duas coisas: a existência de exemplos de famílias de sistemas dinâmicos que admitiam partições de Markov, a saber, os sistemas de Anosov, pseudo sistemas de Anosov, sistemas de Axioma A e automorfismos hiperbólicos do toro, mas também a simplicidade que daí resultava para o estudo das dinâmicas em causa, motivando desse modo a procura de partições de Markov para outras dinâmicas. Por outro lado, sabe-se hoje que sistemas não-hiperbólicos podem não admitir partições de Markov, pelo que talvez possa ser

⁷Do inglês *How and to what extent can a dynamical system be represented by a symbolic one?*

⁸O que imediatamente determina uma enorme simplificação do seu estudo.

necessário a introdução de partições de um tipo mais geral que as de Markov, ver [141].

É nossa decisão apresentar este tema separando os casos finito e infinito numerável. Pensamos que desse modo ficará mais claro os problemas que a segunda das situações coloca e sobretudo a forma ainda incompleta que alguns desses problemas estão tratados. Mais tarde será patente que será o caso infinito que nos interessou e onde nos foi possível dizer algo de original.

Para iniciar a nossa exposição sobre as partições de Markov vamos introduzir o conceito de aplicação factor⁹. Sem perda de generalidade, nesta exposição vamos assumir que os espaços de fase dos sistemas dinâmicos são espaços métricos compactos.

Definição 3.18. *Um ponto $x \in X$ chama-se duplamente transitivo se ambas as suas órbitas para o futuro, $(f^n(x)), n \geq 0$, e para o passado, $(f^n(x)), n \leq 0$, são densas em X .*

Definição 3.19. *Sejam (X, ϕ) e (Y, ψ) dois sistemas dinâmicos. O sistema (Y, ψ) diz-se um factor do primeiro, e o primeiro uma extensão do segundo, se existe uma aplicação $\pi : X \rightarrow Y$, chamada aplicação factor, tal que:*

1. $\psi \pi = \pi \phi$
2. π é contínua
3. π é sobrejectiva.

A aplicação $\pi : X \rightarrow Y$ diz-se um factor finito, ou finita-a-um, se existe um limite no número das suas pré-imagens, e essencialmente um-a-um se cada ponto duplamente transitivo tem uma só pré-imagem.

Definição 3.20. *Um homeomorfismo ϕ sobre um espaço métrico X diz-se expansivo se existe um número real $c > 0$ tal que, se, para todo $p, q \in X$ e todo $n \in \mathbb{Z}$, a desigualdade*

$$d(\phi^n p, \phi^n q) < c,$$

implicar a identificação dos pontos $p = q$.

⁹A partir do inglês *factor map*.

Estamos então agora em condições para encarar a ideia de partir o espaço de fases de uma dinâmica em regiões e a partir daí estudar as visitas a essas regiões e já não as órbitas de todos os pontos desse espaço de fases.

Seja (X, f) um sistema dinâmico e seja N um número natural finito.

Definição 3.21. *Uma família de conjuntos $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_{N-1}\}$ diz-se uma partição topológica do espaço X se são válidas as seguintes propriedades:*

1. *cada R_i é aberto;*
2. *$R_i \cap R_j = \emptyset$, se $i \neq j$;*
3. *$X = \overline{R_0} \cup \overline{R_1} \cup \dots \cup \overline{R_{N-1}}$.*

Dadas duas partições topológicas de um espaço é possível construir uma terceira. Para tal, atentemos na seguinte definição e no resultado que se lhe segue.

Definição 3.22. *Sejam $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_{N-1}\}$ e $\mathcal{S} = \{S_0, S_1, \dots, S_{M-1}\}$ partições de X . Chamamos refinamento topológico comum de \mathcal{R} e \mathcal{S} à partição $\mathcal{R} \vee \mathcal{S}$ dada por*

$$\mathcal{R} \vee \mathcal{S} = \{R_i \cap S_j : R_i \in \mathcal{R}, S_j \in \mathcal{S}\}.$$

Teorema 3.11. *O refinamento topológico comum de duas partições é também uma partição topológica.*

Definição 3.23. *Dada uma partição $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_{N-1}\}$, chama-se diâmetro da partição à grandeza*

$$d(\mathcal{R}) = \max_{R_i \in \mathcal{R}} d(R_i),$$

onde $d(R_i) = \sup_{x, y \in R_i} d(x, y)$.

Definição 3.24. *Uma partição topológica \mathcal{R} de X diz-se geradora para o sistema dinâmico (X, f) se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\left(\bigvee_{-n}^n f^k \mathcal{R}\right) = 0.$$

O resultado seguinte estabelece condições suficientes para que uma partição topológica seja geradora.

Teorema 3.12. *Seja (X, f) um sistema dinâmico expansivo e \mathcal{R} uma partição topológica tal que $d(\mathcal{R}) < c$, onde c é a constante de expansividade. Então, \mathcal{R} é uma partição geradora.*

Seja $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_{N-1}\}$ uma partição geradora para o sistema dinâmico (X, f) e seja Σ o conjunto das sequências definidas por

$$\Sigma_{\mathcal{R}} = \left\{ s = s_0 s_1 \dots s_n \dots : \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcap_{k=-n}^n f^{-k} R_{s_k}} \neq \emptyset \right\}.$$

Uma vez que, por hipótese, \mathcal{R} é uma partição geradora, podemos concluir de imediato que o conjunto

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\bigcap_{k=-n}^n f^{-k} R_{s_k}}$$

consiste num único ponto. Deste modo, podemos definir a aplicação $\pi : \Sigma_{\mathcal{R}} \rightarrow X$, que a cada sequência $s = s_0 s_1 \dots s_n \dots \in \Sigma_{\mathcal{R}}$ faz corresponder

$$\pi(s) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{f^n R_{s_{-n}} \cap f^{n-1} R_{s_{-n+1}} \cap \dots \cap f^{-n} R_{s_n}},$$

relativamente à qual se garante que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{\phi} & X \end{array}$$

É válida a seguinte afirmação.

Teorema 3.13. *Seja (X, f) um sistema dinâmico e \mathcal{R} uma sua partição geradora. Então, o conjunto $\Sigma_{\mathcal{R}}$ é um conjunto fechado e invariante pela aplicação deslocamento e a aplicação π é um factor do sistema dinâmico $(\Sigma_{\mathcal{R}}, \sigma)$ sobre o sistema (X, f) , isto é, a aplicação π satisfaz as seguintes três condições:*

1. $\sigma \pi = \pi \phi$
2. π é contínua
3. π é sobrejectiva.

Definição 3.25. Diz-se que uma partição topológica \mathcal{R} é uma partição de Markov se, para $n \geq 3$, a seguinte propriedade é válida: para todo k , tal que $1 \leq k \leq n-1$, tem-se

$$R_{s_k} \cap f^{-1}R_{s_{k+1}} \neq \emptyset \implies \bigcap_{k=1}^n f^{-k}R_{s_k} \neq \emptyset.$$

É válido o seguinte teorema.

Teorema 3.14. Suponhamos que o sistema dinâmico (X, f) é expansivo e admite uma partição geradora de Markov $\mathcal{R} = \{R_0, R_1, \dots, R_{N-1}\}$. Então, a aplicação π é essencialmente um-a-um de $\Sigma_{\mathcal{R}}$ sobre X .

Como vemos, este resultado estabelece condições suficientes para que uma partição do espaço de fases de um sistema dinâmico nos proporcione uma dinâmica simbólica que seja uma representação fiel das diferentes dinâmicas não equivalentes admitidas pelo sistema inicial.

3.6 Teoria de Perron-Frobenius para matrizes de dimensão finita

No estudo dos *subshifts* de tipo finito deparamos com matrizes não-negativas, para as quais existe uma teoria poderosa, conhecida por teoria de Perron-Frobenius. Para uma exposição detalhada desta teoria, no caso de matrizes de dimensão finita, é forçoso referir aquele que, hoje em dia é considerado um clássico, [49]. Contudo, gostaríamos também de referir que [77] contém uma exposição interessante sobre esta teoria e suas aplicações, apresentando variantes de demonstrações dos teoremas correspondentes.

Seguem-se dois resultados sobre os valores e vectores próprios de matrizes irredutíveis e primitivas obtidos por Oskar Perron e Ferdinand Frobenius. Começaremos por enunciar o teorema sobre matrizes irredutíveis.

Teorema 3.15. Dada uma matriz A não-negativa, de dimensão $n \times n$, irredutível, existe um valor próprio real e positivo λ de A tal que:

1. λ é uma raiz simples do polinómio característico de A ;

2. $\lambda > |\mu|$, onde μ é qualquer outro valor próprio de A ;
3. para toda a matriz B tal que $0 \leq B \leq A$ (comparação entre matrizes efectuada elemento a elemento), seja β um valor próprio de B ; então, temos que $|\beta| \leq \lambda$, onde a igualdade ocorre se, e somente se, $B = A$;
4. λ tem vectores próprios direito e esquerdo, r_λ e ℓ_λ , respectivamente, estritamente positivos;
5. os vectores próprios r_λ e ℓ_λ são únicos, a menos de uma constante;

O valor próprio λ do teorema acima diz-se o valor próprio de Perron da matriz A . Um vector próprio positivo correspondente ao valor próprio λ diz-se um vector próprio de Perron.

No caso em que A é uma matriz primitiva, acresce ao resultado anterior uma sexta proposição. Vejamos então esse resultado.

Teorema 3.16. *Seja A uma matriz não-negativa, de dimensão $n \times n$, primitiva. Então, existe um valor próprio real e positivo λ tal que:*

1. λ é uma raiz simples do polinómio característico de A ;
2. $\lambda > |\mu|$, onde μ é qualquer outro valor próprio de A ;
3. para toda a matriz B tal que $0 \leq B \leq A$ (comparação entre matrizes efectuada elemento a elemento), seja β um valor próprio de B ; então, temos que $|\beta| \leq \lambda$, onde a igualdade ocorre se, e somente se, $B = A$;
4. λ tem vectores próprios direito e esquerdo, r_λ e ℓ_λ , respectivamente, estritamente positivos;
5. os vectores próprios r_λ e ℓ_λ são únicos, a menos de uma constante;
6. tem-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{\lambda^n} = r_\lambda \cdot \ell_\lambda$, onde ℓ_λ e r_λ são dois vectores próprios esquerdo e direito correspondentes a λ , respectivamente, normalizados de tal maneira que $\ell_\lambda \cdot r_\lambda = 1$.

À semelhança do caso anterior, também aqui é usual dizer que λ é o valor de Perron da matriz A e um seu vector próprio positivo um vector de Perron de A .

Estando assegurada a existência deste valor próprio λ , com as propriedades enunciadas, para o caso de uma qualquer matriz inteira, não negativa, irreduzível, o resultado seguinte vem evidenciar o seu importante significado quando a matriz em causa define uma Cadeia de Markov Topológica.

Teorema 3.17. *Seja A a matriz de transição de um subshift do tipo finito (X_A, σ) . Se A é uma matriz irreduzível, então, a entropia topológica de (X_A, σ) é dada por*

$$h_{\text{top}}(\Sigma_A) = \log \lambda.$$

No caso em que A seja uma matriz redutível, o enunciado do teorema anterior modifica-se um pouco, mas ainda assim é possível relacionar a entropia do sistema simbólico (X_A, σ) com a matriz A .

Teorema 3.18. *Seja A a matriz de transição de um subshift do tipo finito (X_A, σ) . Então, a entropia topológica de (X_A, σ) é dada por*

$$h_{\text{top}}(\Sigma_A) = \log \rho(A),$$

onde por $\rho(A)$ se denota o raio espectral da matriz A .

3.7 Cadeias de Markov Topológicas infinitas numeráveis

Agora vamos introduzir o conceito de Cadeia de Markov Topológica para o caso de um alfabeto infinito numerável. A diferença fundamental entre o caso estudado anteriormente, onde se tinha um alfabeto com um número finito de símbolos, e esta situação reside na compacidade dos espaços de sequências correspondentes. De facto, se o alfabeto é finito, mostra-se que o referido espaço das sequências é compacto, o que já não acontece quando o alfabeto é infinito numerável. Para a exposição que se segue, seguiremos o trabalho de Bruce Kitchens, [66].

Consideremos um alfabeto \mathcal{A} , desta vez um conjunto infinito numerável de símbolos, $\mathcal{A} = \{S_1, S_2, \dots\}$, munido da topologia discreta. Então, tal como no caso finito, o

conjunto de todas as sequências de símbolos de \mathcal{A} surge como

$$\Sigma = \{S_1, S_2, \dots\}^{\mathbb{N}} = \{s = s_1 s_2 \dots, s_i \in \mathcal{A}\}.$$

Consideremos em Σ a topologia produto. Então, tal como no caso finito, temos que a aplicação deslocamento $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é contínua em Σ .

Como sistema dinâmico simbólico, também agora vamos dizer que (Σ, σ) é o *shift* completo relativamente ao conjunto infinito numerável de símbolos \mathcal{A} . Seguindo ainda as ideias anteriormente expostas, iremos agora introduzir a classe dos sistemas dinâmicos simbólicos cujas sequências são descritas por uma matriz.

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de elementos em $\{0, 1\}$, indexada a partir do alfabeto \mathcal{A} . A partir desta matriz podemos construir um subconjunto de sequências, $X_A \subset \Sigma$, invariante em relação à aplicação *shift*,

$$X_A = \{s = s_1 s_2 \dots \in \Sigma : a_{s_i s_{i+1}} = 1\}.$$

Definição 3.26. *O sistema dinâmico (X_A, σ) diz-se uma Cadeia de Markov Topológica infinita numerável definida por A , ou um subshift topológico definido por A .*

Observação 3.9. *Deve-se ter algum cuidado e não confundir o conceito de Cadeia de Markov Topológica infinita numerável como oposição a subshift de tipo finito¹⁰. Foi por essa razão que na altura considerámos importante evidenciar o porquê da designação de finito.*

Também estes sistemas dinâmicos simbólicos, (X_A, σ) , essencialmente descritos a partir de uma matriz, são passíveis de uma caracterização da dinâmica a partir de propriedades algébricas. Mas para vermos de que modo isso é possível no caso de um alfabeto com um número infinito numerável de elementos, vejamos primeiro como se generalizam os conceitos anteriormente usados.

Definição 3.27. *Uma matriz $A = (a_{ij})$ real, não-negativa, de dimensão infinita numerável, diz-se irredutível se, para todo par de índices (i, j) , existe $\ell > 0$ tal que $a_{ij}^{(\ell)} > 0$, onde por $a_{ij}^{(\ell)}$ se denota um elemento da matriz A^ℓ .*

¹⁰Como é evidente, o sistema par de Weiss, apresentado no Exemplo 7, não é uma Cadeia de Markov Topológica infinita numerável.

Definição 3.28. Dada uma matriz $A = (a_{ij})$ real, não-negativa, de dimensão infinita numerável, chama-se período do índice i , e denota-se por $p(i)$, a

$$p(i) = \text{mdc}\{\ell : a_{ij}^{(\ell)} > 0\}.$$

Como se verifica facilmente, se a matriz A é irredutível, então, todos os períodos $p(i)$ são iguais. Neste caso, $p = p(i)$ diz-se o período da matriz A .

Definição 3.29. Uma matriz A real, não-negativa, de dimensão infinita numerável, irredutível, de período $p = 1$, diz-se primitiva, ou aperiódica.

Para matrizes irredutíveis tem-se o seguinte resultado.

Teorema 3.19. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de dimensão infinita numerável, não-negativa e irredutível. Então, as grandezas

$$\lambda_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_{ij}^{(n)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

existem para todo $i, j \in \mathbb{N}$, e têm um valor comum, $\lambda = \frac{1}{R}$.

Observação 3.10. O limite no resultado acima é calculado quando n tende para infinito ao longo da classe resto módulo d , com d o período da matriz, para a qual os termos na sequência não são identicamente nulos.

Observação 3.11. O valor R do teorema anterior chama-se parâmetro de convergência da matriz A e o seu recíproco chama-se a sua norma de convergência.

Observação 3.12. Caso a matriz A tenha dimensão finita, então, $\lambda = \frac{1}{R}$ é um valor próprio maximal de A .

Com estas definições de matriz de dimensão infinita numerável irredutível e primitiva, podemos apresentar o resultado que atribui significado dinâmico a estas propriedades algébricas da matriz de transição de uma Cadeia de Markov Topológica infinita numerável.

Teorema 3.20. *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de elementos em $\{0, 1\}$, indexada a partir de um alfabeto \mathcal{A} , com um número infinito numerável de símbolos, e denotemos por (X_A, σ) a correspondente Cadeia de Markov Topológica infinita numerável de sequências de símbolos de \mathcal{A} . Então,*

1. *(X_A, σ) é topologicamente transitiva se, e somente se, a matriz A é irredutível;*
2. *(X_A, σ) é topologicamente mixing se, e somente se, a matriz A é primitiva.*

Para matrizes irredutíveis tem-se o seguinte resultado.

Teorema 3.21. *Seja $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ uma matriz irredutível com elementos não-negativos. Então, as grandezas*

$$\lambda_{ij} := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_{ij}^{(n)} \right)^{\frac{1}{n}}$$

existem para todo $i, j \in \mathbb{N}$, e têm um valor comum $\lambda := \frac{1}{R}$.

Observação 3.13. *O limite no resultado acima é calculado quando n tende para infinito ao longo da classe resto módulo d , com d o período da matriz, para a qual os termos na sequência não são identicamente nulos.*

Observação 3.14. *O valor R do teorema anterior chama-se parâmetro de convergência da matriz A e o seu recíproco chama-se a sua norma de convergência.*

Observação 3.15. *Caso a matriz A tenha dimensão finita, então, tem-se que $\lambda = \frac{1}{R}$ é um valor próprio maximal.*

A teoria de Perron-Frobenius tem extensões para o caso de operadores lineares que deixam invariante um cone positivo num espaço linear normado. Nos seus trabalhos [134] e [135], D. Vere-Jones, desenvolve uma teoria de Perron-Frobenius para matrizes não-negativas de dimensão infinita numerável, mas sem considerá-las como operadores lineares. Ele usa técnicas relacionadas com funções geradoras. A exposição que se segue baseia-se no trabalho de Bruce Kitchens e há um certo paralelismo com o trabalho de Vere-Jones atrás citado¹¹.

¹¹Veja-se a observação 7.1.2 do trabalho citado de Bruce Kitchens.

Comecemos por um importante resultado.

Teorema 3.22. *Seja A uma matriz real, não-negativa, de dimensão infinita numerável, irredutível e aperiódica. Fixado um índice i , tem-se que:*

1. *existe $k > 0$ tal que $a_{ii}^{(n)} > 0$, para todo $n \geq k$;*
2. *para todo n, m , tem-se a desigualdade $a_{ii}^{(n+m)} \geq a_{ii}^{(n)} a_{ii}^{(m)}$;*
3. *existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{ii}^{(n)}}$ e é igual a $\sup_n \sqrt[n]{a_{ii}^{(n)}}$;*
4. *para todo n , tem-se*

$$\frac{a_{ii}^{(n)}}{\lambda^n} \leq 1,$$

$$\text{com } \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{ii}^{(n)}}.$$

O valor λ que surge neste resultado tem um papel bastante importante, como vai ficar evidente logo pela forma como é habitual ser designado.

Definição 3.30. *Consideremos uma qualquer matriz A real, não-negativa, de dimensão infinita numerável, irredutível e aperiódica, e fixemos um índice i . Chama-se valor de Perron da matriz A a*

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{ii}^{(n)}}.$$

As matrizes de dimensão infinita numerável podem ser classificadas em transientes, recorrentes nulas e recorrentes positivas. Contudo, a introdução destes conceitos exige termos de recorrer a funções geradoras, a saber, $a_{ij}(z)$, $\ell_{ij}(z)$, e $r_{ij}(z)$.

Consideremos uma matriz de dimensão infinita numerável A e adoptemos a seguinte convenção: $A_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $A_{ij}(1) = a_{ij}$ e $A_{ij}(n) = a_{ij}^{(n)}$. Então, a primeira das funções vem dada como

$$a_{ij}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{ij}(n) z^n.$$

Se adoptarmos a convenção $L_{ij}(0) = 0$, $L_{ij}(1) = a_{ij}$ e $L_{ij}(n+1) = \sum_{r \neq i} L_{ir}(n) A_{rj}(n)$, então podemos definir a função

$$\ell_{ij}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} L_{ij}(n) z^n.$$

Finalmente, a partir de $R_{ij}(0) = 0$, $R_{ij}(1) = a_{ij}$ e $R_{ij}(n+1) = \sum_{r \neq i} A_{ir}(n)R_{rj}(n)$, a terceira e última das funções apresenta-se como

$$r_{ij}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} R_{ij}(n)z^n.$$

Definição 3.31. *Uma matriz primitiva A diz-se recorrente se $a_{ii}(\frac{1}{\lambda}) = \infty$ e transiente se $a_{ii}(\frac{1}{\lambda}) < \infty$.*

É útil subdividir as matrizes primitivas recorrentes em duas classes, a saber, a classe das matrizes recorrentes nulas e a classe das matrizes recorrentes positivas.

Definição 3.32. *Uma matriz primitiva A chama-se recorrente nula se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nL_{ii}(n)}{\lambda^n} = \infty$ e recorrente positiva se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nL_{ii}(n)}{\lambda^n} < \infty$.*

Observação 3.16. *No seu trabalho [134], D. Vere-Jones introduz a mesma classificação considerando a grandeza $R = \frac{1}{\lambda}$. Assim, ele distingue entre as matrizes R -transientes, R -recorrentes e dentro destas últimas entre as matrizes R -recorrentes nulas e R -recorrentes positivas. Ainda no mesmo artigo, Vere-Jones generaliza estas noções, tomando na definição anterior um qualquer número $r > 0$, em lugar de R .*

Observação 3.17. *Se na Definição 3.32 fizermos $\lambda = 1$, recuperamos as noções correspondentes das Cadeias de Markov Probabilísticas.*

Para matrizes recorrentes positivas é válido seguinte teorema.

Teorema 3.23. *Seja A uma matriz de dimensão infinita numerável, não-negativa e irreduzível, com valor de Perron λ . Então, A é recorrente positiva se, e somente se, existem dois vectores não-negativos, x, y , tais que $y \cdot x < \infty$, que satisfazem $x A = \lambda x$ e $A y = \lambda y$.*

No seu trabalho [55], Boris Gurevich introduziu uma outra subclasse dentro das matrizes recorrentes positivas constituída pelas matrizes que ele designa por matrizes recorrentes positivas estáveis¹², mas que em [14] são designadas por matrizes fortemente

¹²Do inglês *stable positive recurrent*.

positivas recorrentes ¹³. Para a definição desta classe de matrizes e resultados relevantes pode-se ver os dois trabalhos atrás mencionados.

É válido o seguinte teorema.

Teorema 3.24 (Perron-Frobenius generalizado). *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz não-negativa, de dimensão infinita numerável. Assuma-se adicionalmente que ela é irreduzível, aperiódica e recorrente. Então, existe um valor de Perron $\lambda > 0$ tal que*

1. $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{ij}^{(n)}}$, para quaisquer i, j ;
2. λ tem vectores próprios direito e esquerdo, r e ℓ , respectivamente, estritamente positivos;
3. os vectores próprios r e ℓ são únicos a menos de uma constante;
4. tem-se que $\ell \cdot r < \infty$ se, e somente se, a matriz A é positiva recorrente;
5. dada uma matriz B não-negativa, de dimensão infinita numerável, tal que $0 \leq B \leq A$, onde as comparações são feitas elemento a elemento, com β o seu valor de Perron, então, tem-se que $\beta \leq \lambda$; caso a matriz B seja recorrente, então tem-se que $\beta = \lambda$ se, e somente se, $B = A$;
6. se A é uma matriz recorrente nula, então, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{\lambda^n} = 0;$$

no entanto, sendo A uma matriz recorrente positiva, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{\lambda^n} = r \cdot \ell,$$

para vectores próprios direito e esquerdo, r, ℓ , satisfazendo $\ell \cdot r = 1$.

Se a matriz A é uma matriz irreduzível, aperiódica e recorrente, é possível provar que tanto o valor de Perron de A , como vectores esquerdo e direito correspondentes, podem ser aproximados a partir de submatrizes finitas da matriz A .

¹³Do inglês *strongly positive recurrent*.

Teorema 3.25 (da aproximação finita). *Seja A uma matriz de dimensão infinita numerável não-negativa, irredutível, aperiódica e recorrente. Seja λ o valor de Perron de A e ℓ e r , respectivamente, vectores próprios esquerdo e direito correspondentes a λ , normalizados de modo que, para algum índice i , se tenha $\ell_i = r_i = 1$. Então,*

1. *tem-se que*

$$\lambda = \sup\{\lambda(B)\},$$

relativamente a toda a submatriz finita B de A , onde por $\lambda(B)$ se denota o valor próprio de Perron de B ;

2. *dada uma família crescente de submatrizes A_n de A finitas, irredutíveis e aperiódicas, que convergem para A ; sejam $\ell^{(n)}$ e $r^{(n)}$ vectores próprios esquerdo e direito, respectivamente, correspondentes aos seus valores de Perron $\lambda(A_n)$ normalizados de tal maneira que $\ell_i^{(n)} = r_i^{(n)} = 1$; então, tem-se que,*

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \ell_j^{(n)} &= \ell_j \\ \lim_{n \rightarrow \infty} r_j^{(n)} &= r_j,\end{aligned}$$

para todo j .

No contexto destas Cadeias de Markov Topológicas, relativas a um alfabeto com um número infinito numerável de símbolos, a definição de entropia requer cuidados adicionais em comparação com o caso do alfabeto finito, uma vez que não existe agora qualquer garantia da compacidade do espaço das sequências X_A . Neste sentido, é importante perceber em que situações é que essa compacidade está assegurada.

Definição 3.33. *Uma matriz A real, não-negativa, de dimensão infinita numerável, diz-se localmente finita, se são finitas as somas dos elementos de cada linha e de cada coluna.*

Observação 3.18. *Se as somas dos elementos de cada linha e de cada coluna de uma matriz A real, não-negativa, de dimensão infinita numerável, são uniformemente limitadas, então A diz-se uniformemente localmente limitada.*

Teorema 3.26. *O espaço das sequências X_A é localmente compacto se, e somente se, a matriz A é localmente finita.*

Uma definição de entropia comumente usada neste contexto é aquela apresentada por Boris Gurevich, ver [118], que vamos introduzir já de seguida. Depois, veremos também que a entropia de Gurevich verifica um princípio variacional.

Definição 3.34. *Seja A uma matriz de elementos em $\{0, 1\}$, indexada a partir de um alfabeto \mathcal{A} , com um número infinito numerável de símbolos, e denotemos por (X_A, σ) a correspondente Cadeia de Markov Topológica infinita numerável de sequências de símbolos de \mathcal{A} . Chama-se entropia de Gurevich de (X_A, σ) a*

$$h_G(X_A) = \sup \{h_{\text{top}}(X_{A'})\},$$

onde \sup é tomado relativamente a toda a submatriz finita A' de A .

A proposição 7.2.6 em [66] afirma que a entropia de Gurevich é igual ao logaritmo do valor de Perron da matriz A .

Vamos então agora mostrar de que forma se pode perceber o conceito de entropia de Gurevich como resultado de um princípio variacional. Mas primeiro, vejamos como, dada uma matriz das transições de uma Cadeia de Markov Probabilística, se pode obter a correspondente matriz das transições topológicas.

Definição 3.35. *Uma matriz estocástica $P = (p_{ij})$ diz-se compatível com $A = (a_{ij})$, quando, para todo i, j , $a_{ij} = 1$ se, e somente se, $p_{ij} > 0$.*

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz de dimensão infinita numerável de elementos em $\{0, 1\}$, irreduzível, e seja $P = (p_{ij})$ uma matriz estocástica compatível com A , com um vector de probabilidade estacionário $p = (p_i)$.

Definição 3.36. *O par (p, P) define uma medida μ_P determinada por*

$$\mu_P([i_0, \dots, i_\ell]_t) = p_{i_0} P_{i_0 i_1} \cdots P_{i_{\ell-1} i_\ell},$$

onde $[i_0, \dots, i_\ell]_t$ é um cilindro.

A extensão desta medida para X_A é uma medida invariante pela aplicação deslocamento, chamada medida de Markov.

Definição 3.37. *Dada uma medida boreliana invariante μ sobre X_A , a sua aproximação markoviana de passo um¹⁴ é a medida de Markov definida por*

$$p_i = \mu([i])$$

$$P_{ij} = \frac{\mu([i, j])}{\mu([i])}$$

Seja (X_A, σ) uma Cadeia de Markov Topológica infinita numerável e irredutível.

Teorema 3.27. *Dada uma Cadeia de Markov Topológica infinita numerável e irredutível (X_A, σ) , de valor de Perron de λ , tem-se*

$$\log \lambda = \sup_{\mu} \{h_{\mu}(X_A)\},$$

onde \sup é tomado sobre todas as medidas de probabilidade de Borel μ shift-invariante.

Uma medida que realiza o supremo do teorema acima enunciado chama-se medida maximal.

Teorema 3.28. *Se existe uma medida maximal para uma Cadeia de Markov Topológica infinita numerável e irredutível (X_A, σ) , de valor de Perron de λ , essa medida é dada por*

$$p_i = \ell_i r_i$$

$$P_{ij} = a_{ij} \frac{r_i}{\lambda r_j}$$

onde r, ℓ são vectores próprios direito e esquerdo, respectivamente, da matriz $A = (a_{ij})$, normalizados de tal modo que $\ell \cdot r = 1$.

Teorema 3.29. *Uma Cadeia de Markov Topológica infinita numerável e irredutível tem uma medida maximal se, e somente se, A é uma matriz positiva recorrente. Nesse caso, esta medida é única e markoviana.*

¹⁴Do inglês *one-step Markov approximation*.

Seguindo sempre a forma como, nas secções anteriores, estas ideias foram apresentadas no contexto de alfabetos com um número finito de elementos, vamos de seguida abordar a escolha de regiões do espaço de fases de um sistema dinâmico quando o número dessas regiões é infinito numerável.

3.8 Partições de Markov infinitas numeráveis

O que se segue baseia-se no trabalho [141] e trata da generalização da teoria das partições de Markov para o caso em que temos uma partição do espaço de fases X com um número infinito numerável de elementos.

Consideremos um conjunto I de índices com um número infinito numerável de elementos.

Definição 3.38. *Uma família infinita numerável $\mathcal{R} = \{R_i, i \in I\}$ de subconjuntos de X chama-se partição topológica do espaço X se se verificam as seguintes condições:*

1. *cada R_i é um aberto;*
2. *$R_i \cap R_j = \emptyset$, se $i \neq j$;*
3. *$X = \bigcup_{i \in I} \overline{R_i}$.*
4. *$\forall i \in I, \text{card} \{k \in I, fR_i \cap R_k \neq \emptyset\} < \infty$*

Também aqui vamos necessitar de construir uma terceira partição a partir de duas partições.

Definição 3.39. *Dadas duas partições $\mathcal{R} = \{R_i, i \in I_1\}$, $\mathcal{S} = \{S_j, j \in I_2\}$ de um conjunto X , o seu refinamento topológico comum é a partição $\mathcal{R} \vee \mathcal{S}$ dada por*

$$\mathcal{R} \vee \mathcal{S} = \{R_i \cap S_j : R_i \in \mathcal{R}, S_j \in \mathcal{S}\}.$$

Teorema 3.30. *Dado um sistema dinâmico (X, f) e uma partição topológica \mathcal{R} de X , temos que, para todo n ,*

$$f^n \mathcal{R} = \{f^n R_i, i \in I\}$$

é uma partição topológica de X . Mais ainda, pois, fixado n , e tomando qualquer $m \leq n$, temos que também

$$\bigvee_{k=m}^n f^k \mathcal{R}$$

é uma partição topológica de X .

Definição 3.40. Seja $\mathcal{R} = \{R_i, i \in I\}$ uma partição de um conjunto X . Chama-se diâmetro da partição à grandeza

$$d(\mathcal{R}) = \max_{R_i \in \mathcal{R}} d(R_i)$$

onde $d(R_i) = \sup_{x, y \in R_i} d(x, y)$.

Definição 3.41. Uma partição topológica \mathcal{R} diz-se uma partição geradora para o sistema dinâmico (X, f) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\left(\bigvee_{-n}^n f^k R\right) = 0.$$

Teorema 3.31. Seja (X, f) um sistema dinâmico expansivo e \mathcal{R} uma partição topológica tal que $d(\mathcal{R}) < c$, onde c é a constante de expansividade. Então, \mathcal{R} é uma partição geradora.

Definição 3.42. Diz-se que uma partição topológica \mathcal{R} de um sistema dinâmico (X, f) satisfaz a propriedade da intersecção n -fold, para $n \geq 3$, se

$$\forall k : 1 \leq k \leq n-1, R_{s_k} \cap f^{-1}R_{s_{k+1}} \neq \emptyset \implies \bigcap_{k=1}^n f^{-k}R_{s_k} \neq \emptyset.$$

Se uma partição topológica \mathcal{R} satisfaz esta propriedade, para todo $n \geq 3$, então \mathcal{R} diz-se uma partição de Markov de (X, f) .

Seja $\mathcal{R} = \{R_i, i \in I\}$ uma partição geradora para o sistema dinâmico (X, f) e denotemos por $\Sigma_{\mathcal{R}}$ o seguinte conjunto de sequências:

$$\Sigma_{\mathcal{R}} = \left\{ s = s_1 s_2 s_3 \cdots : R_{s_{n-1}} \cap f^{-1}R_{s_n} \neq \emptyset, \right\},$$

onde, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tem $s_n \in I$. Mostra-se que $(\Sigma_{\mathcal{R}}, \sigma)$ é um *subshift*. Se (X, f) é um factor de $(\Sigma_{\mathcal{R}}, \sigma)$, dizemos que o *subshift* $(\Sigma_{\mathcal{R}}, \sigma)$ é uma representação semi-conjugada de (X, f) .

Suponhamos que existe uma aplicação sobrejectiva $h : \Sigma_{\mathcal{R}} \rightarrow X$ e um subconjunto $D \subseteq \Sigma_{\mathcal{R}}$ tais que

1. a aplicação h é injectiva e contínua sobre $\Sigma_{\mathcal{R}} \setminus D$;
2. a aplicação h é finita-a-um sobre D ;
3. é válida a igualdade $f \circ h = h \circ \sigma$.

Então, o *subshift* $(\Sigma_{\mathcal{R}}, \sigma)$ diz-se uma representação regular de (X, f) . Caso se tenha $D = \emptyset$, diz-se que o *subshift* $(\Sigma_{\mathcal{R}}, \sigma)$ é uma representação fiel de (X, f) .

Teorema 3.32. *Seja (X, f) um sistema dinâmico expansivo que admite uma partição geradora de Markov $\mathcal{R} = \{R_i, i \in I\}$. Defina-se a aplicação $\pi : \Sigma_{\mathcal{R}} \rightarrow X$ dada por*

$$\pi(s) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{f^n R_{s-n} \cap f^{n-1} R_{s-n+1} \cap \dots \cap f R_{s_1}}.$$

Esta aplicação constitui uma representação regular $(\Sigma_{\mathcal{R}}, \sigma)$ do sistema dinâmico (X, f) . Adicionalmente, um subshift do tipo finito é uma representação semi-conjugada dum sistema dinâmico expansivo (X, f) se, e somente se, (X, f) admite uma partição de Markov.

Capítulo 4

Dinâmica simbólica para aplicações no intervalo

Neste capítulo vamos começar por fazer uma exposição da teoria do amassamento, formalismo introduzido, em meados da década de 1970, por John Milnor e William Thurston, numa pré-publicação em duas partes que esperou cerca de dez anos para ser publicada de uma outra forma. Trata-se de uma alternativa aos métodos simbólicos proporcionados pela construção de partições de Markov, que, na sua versão original, foi apresentada para um certo tipo de aplicações no intervalo. Desde então, têm sido propostas variantes desses métodos para outros tipos de aplicações, sempre com um enorme sucesso.

De seguida iremos apresentar os trabalhos de Sousa Ramos, que introduziu a construção da partição de Markov que permite ir para além do formalismo de amassamento. Por fim, iremos apresentar um formalismo alternativo à descrição a partir de uma matriz de transição, também desenvolvido por Sousa Ramos, que, à falta de melhor, designaremos simplesmente por formalismo da matriz Θ .

Mas, para ajudar a perceber como foi possível que as ideias fundamentais, e não muito simples, da teoria do amassamento germinassem, vamos descrever de forma breve aquilo que tinha sido feito até então¹.

¹Não se pretende, de modo algum, fazer a história deste tipo de técnica de análise dos sistemas dinâmicos no intervalo, mas tão só evidenciar um possível fio condutor para um conjunto de trabalhos. Sabemos hoje que neste processo não foram considerados os trabalhos de Myberg e Christian Mira, que, nos seus trabalhos, publicados à volta de 1970, usaram símbolos para registar certas regularidades computacionais relacionadas com as bifurcações de certas aplicações no intervalo.

4.1 Introdução

Em 1973, surgiu publicado no *Journal of Combinatorial Theory* um curioso artigo da autoria de N. Metropolis, M.L. Stein e P.R. Stein. Nesse trabalho, intitulado *On finite limit sets for transformations of the unit interval*, pretendia-se realçar algumas regularidades encontradas no estudo das órbitas periódicas de quatro famílias parametrizadas de aplicações no intervalo unitário, a saber,

$$Q_\lambda(x) = \lambda x(1-x), \quad 3 < \lambda < 4,$$

$$S_\lambda(x) = \lambda \sin(\pi x), \quad \lambda_0 < \lambda < 1,$$

para alguma escolha $0.71 < \lambda_0 < 0.72$,

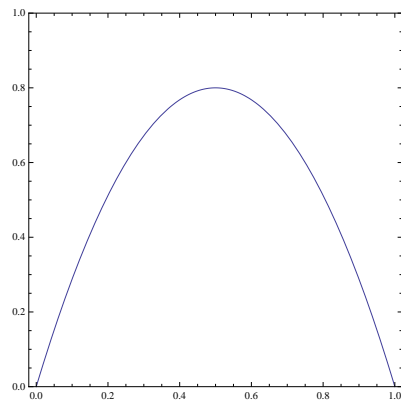
$$C_\lambda(x) = \lambda W(3 - 3W + W^2), \quad W = 3x(1-x),$$

com $\lambda_0 < \lambda < 64/63$, para alguma escolha $0.872 < \lambda_0 < 0.873$, e, finalmente

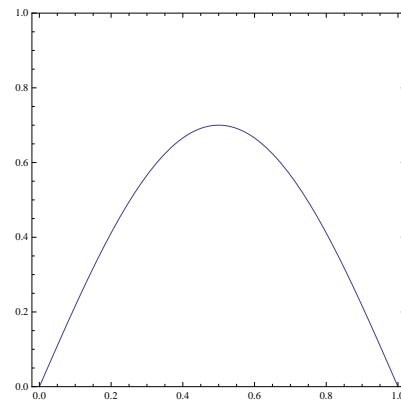
$$L_{\lambda,e}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{e} x & 0 \leq x \leq e; \\ \lambda & e \leq x \leq 1-e; \\ \frac{\lambda}{e} (1-x) & 1-e \leq x \leq 1, \end{cases}$$

onde o primeiro parâmetro, λ , toma valores em $1-e < \lambda < 1$, e e , um parâmetro que caracteriza a largura do patamar do máximo das aplicações, pode, por seu turno, ser escolhido em $0 < e < \frac{1}{2}$.

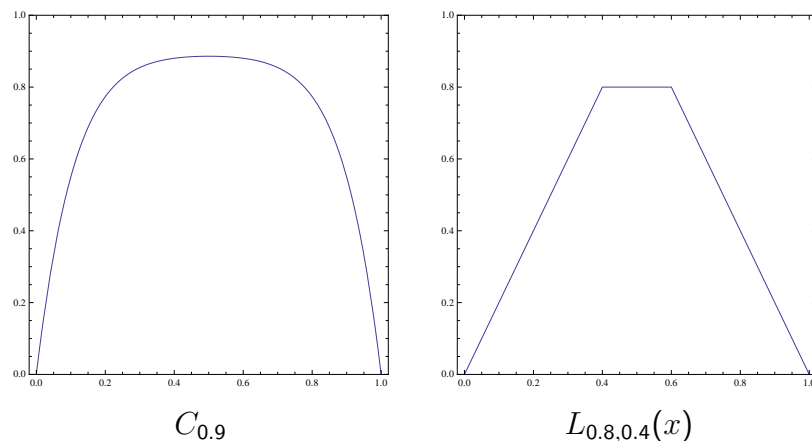
Como é desde logo salientado pelos seus autores, todas estas aplicações são simétricas relativamente ao seu único ponto crítico, $x_c = 1/2$. Nas figuras abaixo são representados os gráficos de aplicações pertencentes a cada uma destas quatro famílias.



$Q_{3.2}(x)$



$S_{0.7}(x)$



Sem conhecimento do Teorema de Sharkovsky, embora publicado há quase uma década, Metropolis, Stein e Stein mostram que todas as famílias de aplicações partilham um padrão no que concerne ao aparecimento de órbitas periódicas. Para evidenciar esse padrão, os autores vão distinguir iteradas de tipo L e iteradas de tipo R, conforme o ponto se encontre à esquerda ou à direita, respectivamente, do ponto crítico x_c . Por outras palavras, na descrição destas regularidades, Metropolis, Stein e Stein perceberam que bastava codificar as órbitas assinalando apenas a sua posição relativamente a x_c . Vemos assim surgir uma nova codificação simbólica do intervalo e, sobretudo, o ponto crítico da aplicação a assumir um papel muito especial na descrição da dinâmica.

Embora fundamental, este trabalho necessitou de alguma justificação, que foi dada por John Guckenheimer, com o seu trabalho, publicado em 1977, na *Inventiones Mathematicae*. De facto, foi Guckenheimer quem conseguiu explicar, no artigo intitulado *On the bifurcation of maps of the interval*, o porquê dos padrões anteriores e a sua presença nas diferentes famílias de aplicações². Com este trabalho, podemos dizer que fica de alguma forma estabelecida a vantagem em codificar as órbitas de acordo com a sua posição relativamente ao ponto crítico da aplicação e o papel que esse mesmo ponto crítico pode ter na classificação das dinâmicas. E é neste contexto que surge o trabalho de Milnor e Thurston, introduzindo um formalismo que, a partir da codificação do intervalo de acordo com os seus subintervalos de monotonia e das sequências simbólicas então associadas às órbitas de todos os pontos críticos, vai chegar à construção de uma matriz que resume de forma magnífica muita da informação dinâmica das aplicações em

²É importante referir que, em 1977, John Guckenheimer já conhecia o Teorema de Sharkovsky.

causa.

4.2 Teoria do amassamento para aplicações no intervalo

Praticamente desde o seu aparecimento, ainda sob a forma de pré-publicação, José Sousa Ramos percebeu a importância do formalismo proposto por Milnor e Thurston e investiu, com alguns dos seus colaboradores, no seu desenvolvimento. Na breve introdução da teoria do amassamento que de seguida vamos apresentar iremos acompanhar de perto [108]³. Contudo, uma vez que queremos estudar a teoria do amassamento no contexto de duas famílias concretas de aplicações no intervalo, vamos seguir a referência citada apenas até certo ponto, abandonando depois o seu carácter geral para apresentar a sua forma particular quando as aplicações têm todas certas características.

Seja $f : I \rightarrow I$ uma aplicação do intervalo compacto $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. As aplicações do intervalo que nos interessa satisfazem as seguintes condições: existe uma colecção $\mathcal{C} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ de subintervalos abertos tais que

1. $\bigcup_{i=1}^n I_i \subset I$;
2. $I_i \cap I_j = \emptyset$, para $i \neq j$;
3. $\text{dom}(f) = \bigcup_{i=1}^n I_i$;
4. $\text{im}(f) \subset \bigcup_{i=1}^n I_i$;
5. a restrição da aplicação a cada um dos subintervalos I_j é estritamente monótona, isto é, as aplicações $f|_{I_i}$, para $i = 1, 2, \dots, n$, são estritamente monótonas.

Observação 4.1. *Atentemos que a partição \mathcal{C} não é necessariamente uma partição do intervalo. O propósito é permitir que f possa ser uma aplicação de um intervalo com buracos, uma importante generalização das aplicações do intervalo, ver [111] e [113].*

³A este propósito, ver também [106] e [113].

Como é evidente, fixada uma aplicação que admita uma colecção de subintervalos \mathcal{C} , é sempre possível construir uma outra colecção \mathcal{C}' relativamente à qual ainda sejam válidas as condições apresentadas acima. No que se segue, vamos admitir sempre que estamos perante uma colecção de subintervalos \mathcal{C} minimal relativamente à inclusão.

Dado um qualquer ponto $x \in \mathbb{R}$, vamos usar as notações x^- e x^+ para, respectivamente, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} x + \epsilon$, onde o limite é tomado por valores negativos de ϵ , e $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} x + \epsilon$, sendo desta vez o limite tomado para valores positivos de ϵ . Assim sendo, vamos dizer que o conjunto dos pontos fronteira de um intervalo (a, b) é dado por $\partial(a, b) = \{a^+, b^-\}$ e que o conjunto dos pontos fronteira de \mathcal{C} é dado por

$$\partial\mathcal{C} = \{x \in I : x \in \partial(I_i), \text{ para algum subintervalo } I_i \in \mathcal{C}\}.$$

Por outro lado, é conveniente fazer a seguinte distinção: o conjunto dos pontos fronteira regulares de \mathcal{C} é dado por $\partial_0\mathcal{C} = \partial\mathcal{C} \setminus \partial I$, isto é, são todos os pontos fronteira de \mathcal{C} excepto os pontos fronteira do intervalo I .

Definição 4.1. *Dada uma aplicação f no intervalo satisfazendo as condições apresentadas, chamam-se pontos singulares de f aos pontos de fronteira regulares de \mathcal{C} .*

Observação 4.2. *É importante notar que, da forma como foram descritos, os pontos singulares de uma aplicação podem ser pontos críticos da aplicação f , assim como pontos de descontinuidade, etc.*

Para simplificar, caso a aplicação seja contínua em x , vamos identificar quaisquer pontos $x^-, x^+ \in \partial\mathcal{C}$, escrevendo apenas x .

Dada uma aplicação f no intervalo satisfazendo as condições acima apresentadas, seja $\mathcal{C} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ uma colecção de subintervalos e $\partial_0\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ o conjunto dos seus pontos singulares. Ao par (f, \mathcal{C}) vamos associar o alfabeto $\mathcal{A}_{(f, \mathcal{C})}$ dado por

$$\mathcal{A}_{(f, \mathcal{C})} = \{S_1, S_2, \dots, S_n, C_1, C_2, \dots, C_m\}.$$

Naturalmente que, se \mathcal{C} é uma partição do intervalo, então o número de pontos singulares será $m = 2(n - 1)$.

Observação 4.3. *Certas famílias de aplicações no intervalo têm associadas um alfabeto natural ou tradicional. Naturalmente que os símbolos em si não são de modo algum importantes, devendo a expressão anterior ser olhada apenas como uma apresentação do número e do tipo de símbolos que (f, \mathbb{C}) determina.*

É importante notar que esta codificação do intervalo é completamente diferente daquela que resulta de uma partição de Markov. No entanto, vamos também agora estudar as sequências de símbolos correspondentes às órbitas dos pontos.

Definição 4.2. *Dada uma aplicação f no intervalo satisfazendo as condições apresentadas e um alfabeto $\mathcal{A}_{(f, \mathbb{C})}$, chama-se aplicação endereço à aplicação $\text{ad} : \text{dom}(f) \rightarrow \mathcal{A}_{(f, \mathbb{C})}$ dada por:*

$$\text{ad}(x) = S_i \quad \text{se } x \in I_i$$

$$\text{ad}(x) = C_i \quad \text{se } x = c_i$$

$$\text{ad}(\inf(I)) = S_1$$

$$\text{ad}(\sup(I)) = S_n$$

Definição 4.3. *Dada uma aplicação f no intervalo satisfazendo as condições apresentadas e um alfabeto $\mathcal{A}_{(f, \mathbb{C})}$, chama-se aplicação itinerário à aplicação $\text{it} : \text{dom}(f) \rightarrow \mathcal{A}_{(f, \mathbb{C})}^{\mathbb{N}}$ dada por*

$$\text{it}(x) = \text{ad}(x) \text{ad}(f(x)) \text{ad}(f^2(x)) \cdots$$

O estudo de uma dinâmica f no intervalo passa pelo conhecimento de todos os itinerários dos pontos do seu domínio. Essas sequências simbólicas, elementos de $\mathcal{A}_{(f, \mathbb{C})}^{\mathbb{N}}$, são chamadas sequências admissíveis por (f, \mathbb{C}) .

De seguida vamos apresentar as sequências simbólicas que, para estas aplicações no intervalo, assumem uma grande importância na caracterização da dinâmica.

Definição 4.4. *Dada uma aplicação f no intervalo satisfazendo as condições apresentadas, seja $\partial\mathbb{C} = \{c_1, \dots, c_m\}$ o conjunto dos seus pontos singulares. Designam-se por sequências de amassamento os itinerários das imagens dos pontos singulares de f ,*

$$K_i = \text{it}(f(c_i)).$$

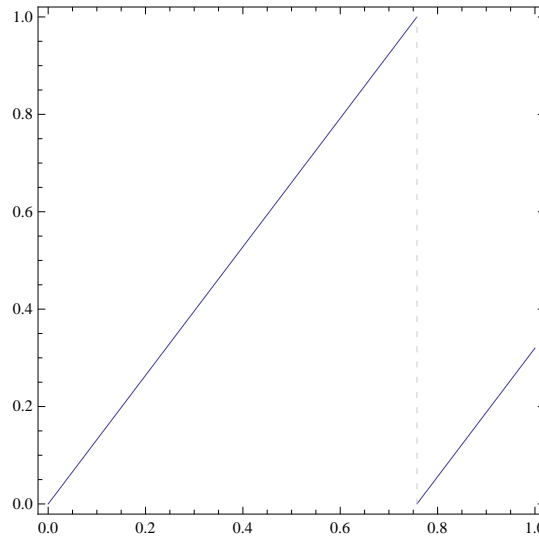
O conjunto das sequências de amassamento de uma aplicação f ,

$$K_f = \{K_i, i = 1, 2, \dots, m\}, \quad (4.1)$$

diz-se o invariante de amassamento de f .

Por razões de simplicidade, se para uma família de aplicações certas sequências de amassamento são sempre iguais a uma certa sequência simbólica, é habitual não se lhe fazer referência. O mesmo se passa caso uma sequência de amassamento seja sempre uma subsequência de outra. Por isso, o invariante de amassamento de uma aplicação pode, na realidade, não apresentar as m sequências de amassamento previstas em (4.1).

Exemplo 8. Consideremos a família das transformações β no intervalo, introduzida no capítulo anterior, mas para valores de β satisfazendo $1 < \beta \leq 2$. Na figura seguinte apresentamos o gráfico da transformação para $\beta = 1.32$,



Como sabemos, pelo conjunto de valores de β considerado, esta família de aplicações no intervalo tem dois pontos singulares, $c_1^\pm = 1/\beta^\pm$. A codificação do intervalo habitualmente escolhida marca o subintervalo $(0, c_1)$ com o símbolo 0 e o subintervalo $(c_1, 1)$ com o símbolo 1, pelo que, neste caso, o alfabeto é dado por $\mathcal{A} = \{0, C_1^-, C_1^+, 1\}$. Deste modo, o invariante de amassamento de uma aplicação f_β é dado por

$$K_{f_\beta} = (\text{it}(f(c_1^-)), \text{it}(f(c_1^+))).$$

Contudo, vê-se claramente que, para qualquer escolha de β , a segunda sequência de amassamento é sempre a mesma, $\text{it}(f(c_1^+)) = 0^\infty$. Deste modo, é razoável dizer que

$$K_{f_\beta} = \text{it}(f(c_1^-)) = \text{it}(1).$$

Recordando a caracterização das sequências simbólicas associadas às transformações β no intervalo apresentada por Parry, ver Teorema 3.4, é possível encontrar desde já um enunciado dinamicamente significativo onde o invariante de amassamento tem um importante papel: escolhida uma aplicação f_β , os itinerários admissíveis satisfazem a desigualdade

$$\text{it}(x) \leq_{\text{lex}} K_{f_\beta}, \quad x \in [0, 1),$$

relativamente à relação de ordem simbólica $0 <_{\text{lex}} C_1^- <_{\text{lex}} C_1^+ <_{\text{lex}} 1$. Deste modo, é possível apresentar uma caracterização das sequências de amassamento para a família das transformações β no intervalo.

Proposição 4.1. *Uma sequência P é sequência de amassamento para alguma transformação β no intervalo se, e somente se,*

$$\sigma^k(P) \leq_{\text{lex}} P, \tag{4.2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Procedendo de modo análogo ao que Sousa Ramos fez para a família das aplicações quadráticas no intervalo, que veremos já de seguida, vamos apresentar a família das sequências de amassamento das transformações β no intervalo sob a forma de uma árvore binária ordenada pelo parâmetro β , onde em cada nível da árvore são colocadas as diferentes sequências de amassamento periódicas. Para simplificar, denotamos por C o ponto singular c_1^- :

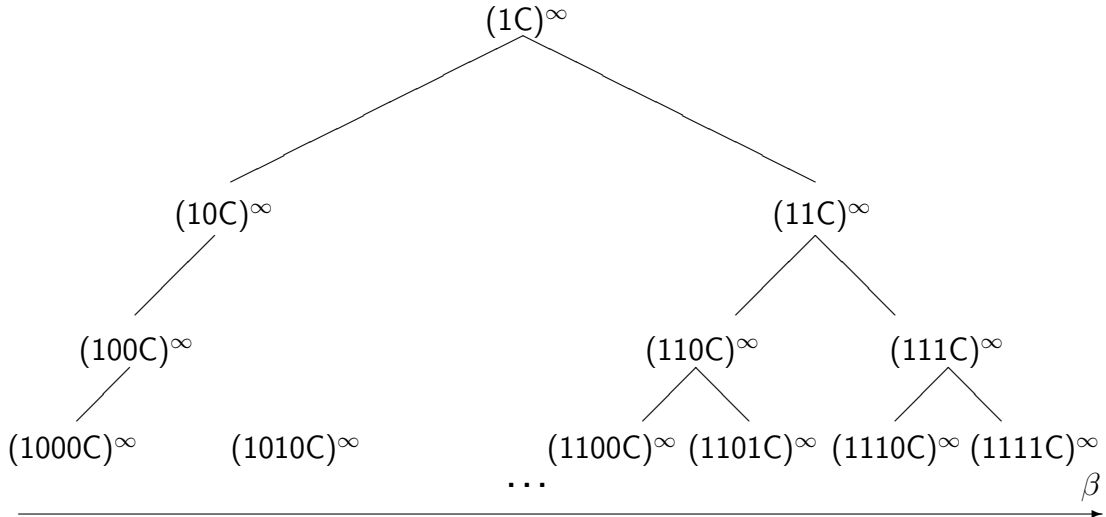


Figura 4.1: Um pormenor da árvore das sequências de amassamento de f_β

Como podemos observar, trata-se de uma árvore podada, uma vez que nem todas as sequências são maximais, isto é, nem todas as sequências passíveis de serem construídas com os símbolos do alfabeto $\mathcal{A} = \{0, C, 1\}$ satisfazem as desigualdades (4.2).

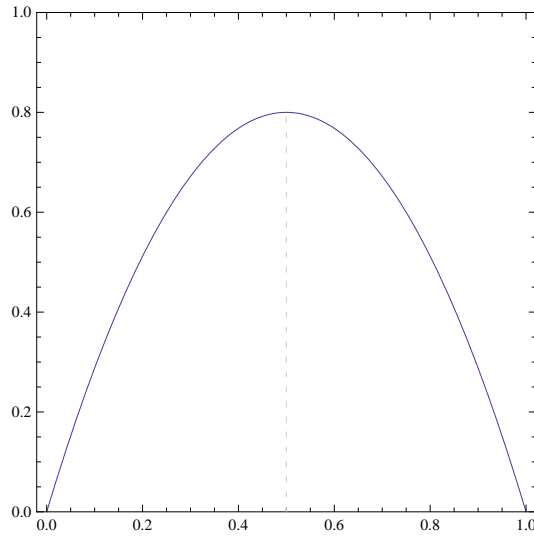
Uma família de aplicações no intervalo também com apenas um ponto singular é a muito conhecida família das aplicações quadráticas no intervalo $[0, 1]$.

Exemplo 9. Consideremos a família de aplicações quadráticas no intervalo $[0, 1]$, com um máximo num ponto pertencente ao interior desse intervalo,

$$f_a(x) = ax(1-x),$$

para $a \in (0, 4]$. Como facilmente se mostra, todas estas aplicações têm o ponto crítico em $x = 1/2$, pelo que os seus pontos singulares, comuns a todas as aplicações, qualquer que seja a escolha do parâmetro, são $c_1^- = 1/2^-$ e $c_1^+ = 1/2^+$. Na figura seguinte voltamos a representar a quadrática correspondente ao valor do parâmetro $a = 3.2$,

salientando desta vez o seu ponto crítico.



Desta vez a colecção de subintervalos escolhida corresponde aos dois subintervalos à esquerda e à direita de $c_1 = 1/2$. Aceita-se assim que o alfabeto habitualmente utilizado faça essa referência à posição relativa dos seus pontos perante $x = 1/2$. Tal como afirmámos anteriormente, sendo f_a uma aplicação contínua em c_1 , não existe a necessidade de distinguir c_1^\pm pelo que o alfabeto habitualmente usado tem apenas três símbolos, $\mathcal{A} = \{L, C, R\}$. Também pelas mesmas razões temos que o invariante de amassamento de f_a é dado simplesmente por

$$K_{f_a} = \text{it}(f_a(c_1)) = \text{it}(f_a(1/2)).$$

De igual forma, para esta família de aplicações no intervalo é possível caracterizar os itinerários admissíveis uma vez conhecido o seu invariante de amassamento. Contudo, neste caso somos obrigados a introduzir uma relação de ordem nas sequências simbólicas diferente da lexicográfica.

Consideremos a relação de ordem entre símbolos que seja o reflexo da ordem natural de pontos do intervalo,

$$L \prec C \prec R,$$

onde, por simplicidade e não havendo necessidade de distinguir mais que um ponto singular, fizemos $C_1 = C$. Agora vamos associar a qualquer sequência finita, a palavra $P = P_1 \cdots P_\ell$, de símbolos de \mathcal{A} uma paridade $\rho(P)$ dada da seguinte forma: $\rho(P) = -1$

se o número de símbolos R em P for ímpar, e $\rho(P) = +1$, caso contrário. Atente-se que, sendo P uma sequência finita de símbolos, não há qualquer problema na decisão da sua paridade. A relação de ordem entre sequências de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ que vamos escolher fica assim definida: sejam $P = P_1P_2\cdots$ e $Q = Q_1Q_2\cdots$ duas sequências distintas de $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Então, porque são distintas, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $P_k \neq Q_k$. Seja ℓ o menor desses índices tais que os correspondentes símbolos de P e Q são diferentes. Sendo assim, dizemos que:

$$P \prec Q \quad \text{se} \quad \rho(P_1 \cdots P_{\ell-1}) = +1 \text{ e } P_{\ell} \prec Q_{\ell},$$

ou

$$P \prec Q \quad \text{se} \quad \rho(P_1 \cdots P_{n-1}) = -1 \text{ e } Q_{\ell} \prec P_{\ell}.$$

Esta relação de ordem surge naturalmente neste contexto devido aos dois resultados seguintes, que mostram inequivocamente como ela está ligada à ordem do intervalo: dados quaisquer pontos x, y do intervalo $[0, 1]$, tem-se que

$$\begin{aligned} x < y &\implies \text{it}(x) \preceq \text{it}(y) \\ \text{it}(x) \prec \text{it}(y) &\implies x < y \end{aligned} \tag{4.3}$$

Com esta relação de ordem definida no espaço das sequências simbólicas formadas a partir de símbolos do alfabeto \mathcal{A} , é possível afirmar que, para todo x pertencente ao intervalo $[f^2(c_1) f(c_1)]$, o intervalo para onde a dinâmica de qualquer ponto converge, é válida a dupla desigualdade:

$$\sigma(K_{f_a}) \preceq \text{it}(x) \preceq K_{f_a}.$$

É exactamente esta dupla desigualdade que permitiu a Sousa Ramos caracterizar o conjunto dos invariantes de amassamento desta família de aplicações no intervalo dizendo que uma sequência $S = S_1S_2\cdots$ de símbolos de \mathcal{A} tal que, se S contém algum símbolo C , sendo S_n o primeiro, então $S = (S_1 \cdots S_n)^{\infty}$, é um invariante de amassamento se, e somente se, for satisfeita a seguinte cadeia de desigualdades

$$\sigma(K_{f_a}) \preceq \sigma^k(K_{f_a}) \preceq K_{f_a}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Como Sousa Ramos mostrou, a melhor forma de apresentar o conjunto de invariantes de amassamento desta família de aplicações no intervalo é salientando a seguinte estrutura em árvore, onde, para simplificar, se usa a notação $(P_1 \cdots P_{\ell})^{\infty} = P_1 \cdots P_{\ell}$:

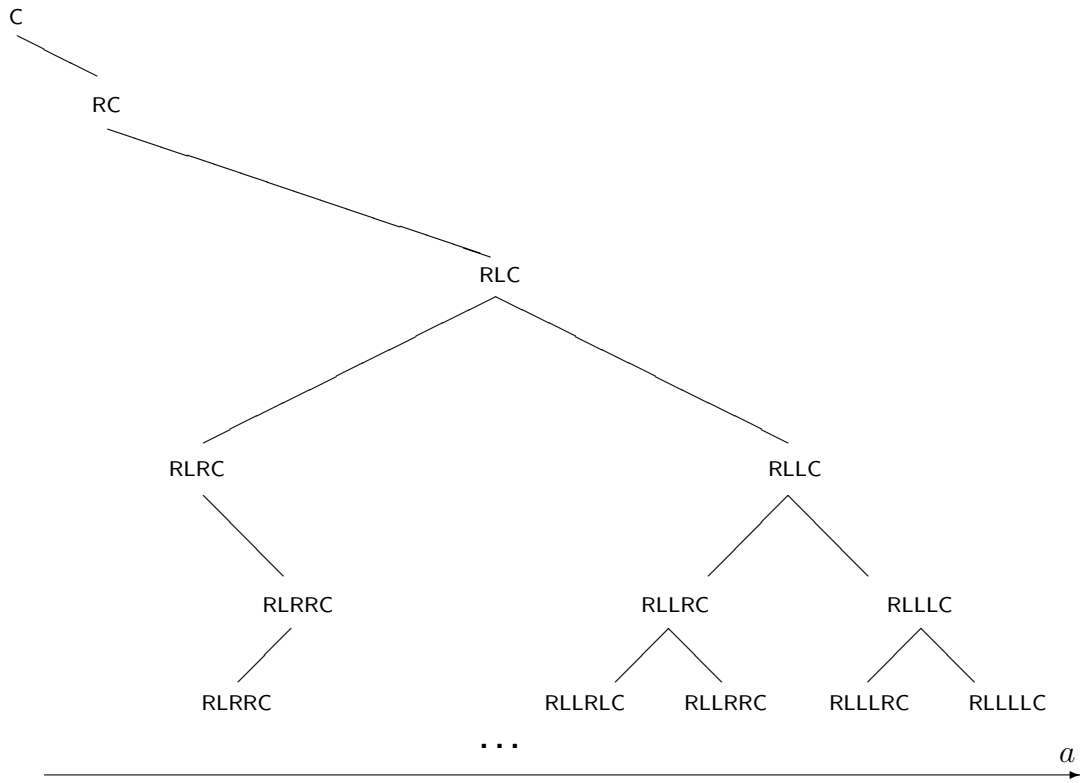


Figura 4.2: Um pormenor da árvore das seqüências de amassamento de f_a

Como podemos observar, trata-se uma vez mais de uma árvore binária podada, uma vez que nem todas as seqüências são invariantes de amassamento de alguma aplicação f_a . Mostra-se que esta árvore dos invariantes de amassamento está ordenada relativamente ao parâmetro a que constrói as diferentes aplicações.

Apresentada a definição de seqüências de amassamento e, em particular, as famílias dessas seqüências para as transformações β e as aplicações quadráticas no intervalo, vamos de seguida apresentar o formalismo de amassamento que, a partir de cada uma destas seqüências, constrói uma matriz de séries de potências. Contudo, não o vamos fazer em toda a sua generalidade, assumindo desde já que a colecção de abertos (I_1, \dots, I_n) forma uma partição do intervalo.

Seja f uma aplicação no intervalo e $\mathcal{C} = \{I_1, \dots, I_{n+1}\}$ uma partição de abertos desse mesmo intervalo satisfazendo as condições enunciadas. Nestas condições, sabemos que o conjunto dos seus pontos singulares é dado por

$$\partial\mathcal{C}_0 = \{a_0^+, a_1^-, a_1^+, \dots, a_{n-1}^-, a_{n-1}^+, a_n^-, a_n^+\}.$$

Consideremos o alfabeto reduzido de (f, \mathcal{C}) ,

$$\mathcal{A}^* = \{S_1, S_2, \dots, S_{n+1}\},$$

correspondente à codificação dos pontos de cada um dos n intervalos abertos de \mathcal{C} . A ideia fundamental de Milnor e Thurston passa por calcular os chamados incrementos de amassamento relativamente a cada um dos pontos a_1, a_2, \dots, a_n que definem a partição.

Chama-se incremento de amassamento do ponto $x = a_i$ à diferença

$$\nu_{a_i} = \theta_{a_i^+}(t) - \theta_{a_i^-}(t),$$

onde por $\theta_{a_i^\pm}(t)$ se denota a coordenada invariante lateral definida por

$$\theta_{a_i^\pm}(t) = \lim_{x \rightarrow a_i^\pm} \theta_x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k t^k P_k^{(\pm)},$$

com

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0 \\ \tau_k &= \prod_{\ell=0}^{k-1} \varepsilon(P_k^{(\pm)}), \quad k > 0, \end{aligned}$$

onde

$$\varepsilon(P_k^{(\pm)}) = \begin{cases} 1 & \text{se } f'(f^\ell(a_i^\pm)) > 0 \\ -1 & \text{se } f'(f^\ell(a_i^\pm)) < 0 \end{cases}$$

e onde por $P^{(\pm i)} = P_1^{(\pm i)} P_2^{(\pm i)} \dots$ se denota o itinerário de a_i^\pm . Prova-se facilmente que todos os incrementos de amassamento se podem escrever como combinação linear dos símbolos de \mathcal{A}^* , isto é,

$$\nu_{a_i} = N_{i,1}(t) S_1 + N_{i,2}(t) S_2 + \dots + N_{i,n+1}(t) S_{n+1}, \quad (4.4)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Com os coeficientes desta combinação linear podemos construir uma matriz $N = (N_{ij})$, de dimensão $n \times (n+1)$, cujos elementos são todos eles séries de potências formais na indeterminada t .

Definição 4.5. Chama-se *matriz de amassamento* associado a um invariante de amassamento $K_f = (P^{(\pm i)})$, com $i = 1, 2, \dots, n$, à matriz $N = (N_{ij})$, de dimensão $n \times (n+1)$, cujos coeficientes N_{ij} são obtidos a partir das combinações lineares (4.4).

Seja \mathcal{V} um espaço vectorial, de dimensão $n + 1$, sobre o conjunto dos números racionais \mathbb{Q} , tendo como base os símbolos do alfabeto reduzido \mathcal{A}^* . Como facilmente se reconhece, o módulo das séries formais na indeterminada t , com coeficientes em \mathcal{V} , usualmente denotado por $\mathcal{V}[[t]]$, é um módulo livre com base $\{S_1, \dots, S_{n+1}\}$, relativamente ao anel $\mathbb{Q}[[t]]$ das séries de potências formais na indeterminada t e coeficientes racionais, pelo que podemos escrever cada elemento de $\mathcal{V}[[t]]$ na forma

$$\theta = \Theta_1 S_1 + \Theta_2 S_2 + \dots + \Theta_{n+1} S_{n+1},$$

de maneira única, onde os coeficientes $\Theta_k \in \mathbb{Q}[[t]]$ satisfazem uma condição que resulta imediatamente do modo como θ é construída.

Lema 4.1. *Seja $\theta = \Theta_1 S_1 + \Theta_2 S_2 + \dots + \Theta_{n+1} S_{n+1}$ um qualquer elemento de $\mathcal{V}[[t]]$. Então, é válida a seguinte igualdade, em $\mathbb{Q}[[t]]$:*

$$(1 - \epsilon(S_1)t) \Theta_1 + \dots + (1 - \epsilon(S_{n+1})t) \Theta_{n+1} = 1.$$

Este resultado permite-nos concluir então que as $(n + 1)$ colunas Γ_i da matriz de amassamento são linearmente dependentes, sendo assim satisfeita a relação

$$(1 - t) \Gamma_1 + (1 + t) \Gamma_2 + \dots + (1 - (-1)^{m+1}t) \Gamma_{m+1} = 0,$$

onde, relativamente à expressão geral apresentada em [89], foi efectuada a substituição de $\epsilon(S_1)$ pelo seu valor, uma vez que todas as aplicações que estamos a considerar têm um ponto fixo no extremo esquerdo do intervalo, $x = a_1$. Deste modo, removendo uma das $(m + 1)$ colunas da matriz de amassamento N , vai ser possível formar uma matriz quadrada cujo determinante vai poder ser facilmente calculado.

Lema 4.2. *Seja $D_i = \det(\Gamma_1, \dots, \hat{\Gamma}_i, \dots, \Gamma_{n+1})$ o determinante da matriz obtida da matriz de amassamento N retirando a coluna Γ_i . Então,*

$$D(t) = \frac{(-1)^{i+1} D_i}{1 - \epsilon(S_i)t}$$

é uma unidade do anel $\mathbb{Z}[[t]]$, independente da escolha do índice i .

Estabelecida a não dependência de $D(t)$ relativamente à coluna da matriz de amassamento removida, podemos inferir que esta quantidade representa a informação contida nos incrementos de amassamento de um invariante de amassamento.

Definição 4.6. *Dada uma aplicação f no intervalo e uma partição \mathcal{C} satisfazendo as condições apresentadas, seja K_f o seu invariante de amassamento. Então, chama-se determinante de amassamento à série de potências $D_{K_f} = D(t)$.*

Vamos de seguida apresentar um exemplo para ilustrar a construção da matriz N associada a um invariante de amassamento de uma aplicação quadrática no intervalo.

Exemplo 10. *Seja $K(f) = \text{RLLRRC}$ a sequência de amassamento de uma aplicação quadrática no intervalo. Então, podemos inferir que o itinerário do ponto c^+ , atendendo à seguinte cadeia de desigualdades:*

$$\begin{aligned} c < c^+ &\Rightarrow f(c^+) < f(c) \Rightarrow f^2(c) < f^2(c^+) \Rightarrow f^3(c) < f^3(c^+) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f^4(c) < f^4(c^+) \Rightarrow f^5(c^+) < f^5(c) \Rightarrow f^6(c) < f^6(c^+) \Rightarrow \\ &\Rightarrow c < f^6(c^+) \end{aligned}$$

pelo que podemos deduzir que $\text{ad}(f(c^+)) = \text{R}$ e assim, que

$$\text{it}(c^+) = (\text{RLLRR})^\infty.$$

Um raciocínio análogo conduz-nos ao itinerário do ponto c^- ,

$$\text{it}(c^-) = \text{L}(\text{RLLRRR})^\infty.$$

Deste modo, podemos inferir imediatamente que os limites superior e inferior da coordenada invariante no ponto crítico são dados por

$$\theta_{c^+}(t) = \text{R} - t\text{R} + t^2\text{L} + t^3\text{L} + t^4\text{R} - t^5\text{R} + \dots,$$

ou seja,

$$\theta_{c^+}(t) = (t^2 + t^3)(1 + t^6 + t^{12} + \dots)\text{L} + (1 - t + t^4 - t^5)(1 + t^6 + t^{12} + \dots)\text{R}.$$

De forma análoga, temos que

$$\theta_{c^-}(t) = \text{L} + t\text{R} - t^2\text{L} - t^3\text{L} - t^4\text{R} + t^5\text{R} - t^6\text{R} + t^7\text{R} - t^8\text{L} - t^9\text{L} - t^{10}\text{R} + \dots,$$

isto é,

$$\theta_c(t) = (1 - (t^2 + t^3)(1 + t^6 + \dots))L + (1 - (1 - t + t^4 - t^5)(1 + t^6 + \dots))R.$$

Assim, temos que o incremento de amassamento ν_1 , correspondente à sequência de amassamento RLLRRC, é dado por:

$$\nu_1 = (-1 + (2t^2 + 2t^3)(1 + t^6 + \dots))L + (-1 + (2 - 2t + 2t^4 - 2t^5)(1 + t^6 + \dots))R.$$

Este resultado para o incremento de amassamento conduz-nos facilmente à seguinte matriz de amassamento, neste caso uma matriz de dimensão 1×2 :

$$N_{\text{RLLRRC}} = \begin{pmatrix} -1 + (2t^2 + 2t^3)(1 + t^6 + \dots) & -1 + (2 - 2t + 2t^4 - 2t^5)(1 + t^6 + \dots) \end{pmatrix},$$

e ao determinante de amassamento

$$D_{\text{RLLRRC}} = \frac{1 - (2t^2 + 2t^3)(1 + t^6 + \dots)}{(1 + t)} = \frac{1 - t - t^2 - t^3 + t^4 - t^5}{1 - t^6}.$$

Um dos aspectos importantes deste formalismo é o facto de ser possível calcular a entropia de uma aplicação através do conhecimento dos zeros do seu determinante de amassamento.

Proposição 4.2. *Seja f uma aplicação no intervalo com entropia topológica positiva e \mathcal{C} uma partição desse intervalo satisfazendo as condições apresentadas anteriormente. Então, a entropia topológica de f é igual ao logaritmo do zero de menor módulo de determinante de amassamento $D_{K_f}(t)$, quando por $K_f(t)$ se denota o invariante de amassamento de f .*

A motivação para esta breve apresentação do formalismo de amassamento está um pouco para lá deste resultado que permite o cálculo da entropia de uma aplicação a partir do conhecimento dos zeros do seu determinante de amassamento. De facto, como veremos no capítulo que se segue, também a função ζ_f da dinâmica f está relacionada com este determinante.

De seguida, vamos apresentar a construção da matriz de transição de Markov, concebida por Sousa Ramos, a partir do invariante de amassamento de uma aplicação. Esta

construção não deve ser olhada apenas como uma alternativa, uma perspectiva diferente, à teoria do amassamento. De facto, trata-se de um estudo da dinâmica no intervalo muito mais profundo, onde muitas, senão mesmo todas, das características fundamentais dessa dinâmica estarão registadas nessa matriz.

4.3 Algumas aplicações de Markov no intervalo

Desde meados da década de 1980, possivelmente influenciado pelos trabalhos de J. Guckenheimer, [51] e [52], e P. Stefan, [133], Sousa Ramos apercebeu-se da possibilidade de construir uma matriz de transição de Markov a partir do invariante de amassamento de uma aplicação no intervalo. Primeiro para a família das aplicações quadráticas no intervalo, mas depois para muitas outras famílias de aplicações no intervalo, esta construção revelou toda a sua importância quando permitiu estudar as dinâmicas através de invariantes algébricos, grupos de Bowen-Franks, grupos dimensão, etc., e com estes complementar os invariantes mais tradicionais, como a entropia topológica, essa sim, já conseguida pelo determinante de amassamento. No que se segue vamos apresentar a construção referida para as famílias de aplicações quadráticas e transformações β no intervalo.

Consideremos uma aplicação quadrática no intervalo f e denotemos por

$$K_f = (P_1 P_2 \cdots P_n C)^\infty$$

o seu invariante de amassamento. Sabendo que esta sequência é o itinerário da imagem por f do ponto crítico $c = 1/2$, podemos concluir que a órbita deste ponto é periódica, de período $n + 1$. De seguida vamos explicitar os itinerários dos $n + 1$ pontos desta órbita periódica, isto é,

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= \sigma(P_1 P_2 \cdots P_n C) = (P_2 \cdots P_n C P_1)^\infty \\ P^{(2)} &= \sigma^2(P_1 P_2 \cdots P_n C) = (P_3 \cdots P_n C P_1 P_2)^\infty \\ &\vdots \\ P^{(n)} &= \sigma^n(P_1 P_2 \cdots P_n C) = (C P_1 P_2 \cdots P_n)^\infty \\ P^{(n+1)} &= \sigma^{n+1}(P_1 P_2 \cdots P_n C) = (P_1 P_2 \cdots P_n C)^\infty. \end{aligned}$$

A ideia é construir uma partição do intervalo a partir dos pontos da órbita do ponto crítico, mas através, única e exclusivamente, do conhecimento do correspondente itinerário simbólico. Isso só vai ser possível pela relação de ordem simbólica \prec que sabemos satisfazer as desigualdades (4.3). Vemos assim que a escrita das $n + 1$ seqüências $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(n)}, P^{(n+1)}$ de forma crescente, nos possibilitará a consequente escrita por ordem crescente também dos pontos da órbita do ponto $c = 1/2$. Seja ρ a permutação no conjunto $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$ tal que

$$P^{(\rho(1))} \prec P^{(\rho(2))} \prec \dots \prec P^{(\rho(n))} \prec P^{(\rho(n+1))}.$$

Como podemos perceber, esta permutação ρ troca a ordem crescente no tempo, a que se referem os índices $P^{(k)}$, pela ordem crescente no espaço, como a cadeia de desigualdades anterior nos mostra. Nesta altura vamos introduzir os pontos $x_{\rho(k)}$ cujos itinerários são exactamente as seqüências simbólicas $P^{(k)}$, isto é,

$$P^{(\rho(k))} = \text{it}(x_{\rho(k)}).$$

Ora, apesar de não sabermos os seus valores numéricos, sabemos, isso sim, que estes pontos do intervalo satisfazem a seguinte cadeia de desigualdades:

$$0 < x_{\rho(1)} < x_{\rho(2)} < \dots < x_{\rho(n)} < x_{\rho(n+1)} < 1.$$

A partir desta cadeia de desigualdades, percebe-se facilmente que vai ser possível construir a seguinte partição $\mathcal{C}_{K_f} = \{I_0, I_1, \dots, I_{n+1}\}$ do intervalo:

$$\begin{aligned} I_0 &= (0, x_{\rho(1)}) \\ I_1 &= (x_{\rho(1)}, x_{\rho(2)}) \\ &\vdots \\ I_n &= (x_{\rho(n)}, x_{\rho(n+1)}) \\ I_{n+1} &= (x_{\rho(n+1)}, 1). \end{aligned}$$

Excepto para situações muito particulares, em que é importante a métrica do intervalo, a dinâmica de f restringe-se ao intervalo fundamental $[f^2(c), f(c)]$. É por essa razão que habitualmente se simplifica a partição anterior, escolhendo-se apenas os abertos que são uma partição desse intervalo fundamental, isto é, $\mathcal{C}_{K_f} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$.

Por fim, para formar a matriz de transição de Markov correspondente à dinâmica de f , resta-nos perceber a dinâmica de cada um destes subintervalos de \mathcal{C}_{K_f} , ou seja, saber qual o comportamento dos seus extremos pela aplicação em causa. Ora, reconhecendo que os pontos, isto é, as sequências $P^{(k)}$, que definem cada um dos subintervalos têm sempre como imagem pela aplicação um dos pontos $x_{\rho(k)}$, isto é, uma das sequência resultante da aplicação deslocamento σ , temos assegurado que tal objectivo vai poder ser conseguido de uma forma puramente simbólica. Assim, se a aplicação f é crescente no subintervalo I_ℓ ,

$$I_\ell = (x_{\rho(\ell)}, x_{\rho(\ell+1)}) = (x_i, x_j)$$

para algum $i, j = 1, 2, \dots, n+1$, teremos imediatamente que a sua imagem $f(I_\ell)$ será dada por

$$f(I_\ell) = f((x_i, x_j)) = (x_{i+1}, x_{j+1}).$$

Caso contrário, isto é, se a aplicação f é decrescente em I_ℓ , temos que a sua imagem por f vem então dada por

$$f(I_\ell) = f((x_i, x_j)) = (x_{j+1}, x_{i+1}).$$

É muito importante observar que, pelas características da aplicação f , podemos afirmar imediatamente que qualquer dos intervalos encontrados como imagem de I_j por f será sempre passível de ser escrita como uma união de subintervalos da partição.

Observação 4.4. *Uma aplicação no intervalo para a qual exista uma partição desse mesmo intervalo satisfazendo esta propriedade diz-se uma aplicação de Markov.*

Podemos então agora apresentar a matriz de transição de Markov que iremos associar a todo o invariante de amassamento.

Definição 4.7. *Seja f uma aplicação quadrática no intervalo com invariante de amassamento K_f periódico de período $n+1$, e seja \mathcal{C}_{K_f} a colecção de n subintervalos associada a K_f . Chamaremos matriz de transição de Markov associada a K_f , que denotaremos*

por $A_{K_f} = (a_{ij})$, à matriz quadrada, de ordem n , cujos elementos são dados por,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } f(I_i) \supset I_j; \\ 0 & \text{de outro modo.} \end{cases}$$

O exemplo seguinte pretende ilustrar este algoritmo.

Exemplo 11. Seja f a aplicação quadrática no intervalo cujo invariante de amassamento é dado por $K_f = (\text{RLLRRC})^\infty$. Obtemos então as seguintes sequências:

$$\begin{aligned} P^{(1)} &= \sigma(\text{RLLRRC}) = (\text{LLRRCR})^\infty & P^{(2)} &= \sigma^2(\text{RLLRRC}) = (\text{LRRCL})^\infty \\ P^{(3)} &= \sigma^3(\text{RLLRRC}) = (\text{RRCRL})^\infty & P^{(4)} &= \sigma^4(\text{RLLRRC}) = (\text{RCRL})^\infty \\ P^{(5)} &= \sigma^5(\text{RLLRRC}) = (\text{CRL})^\infty & P^{(6)} &= \sigma^6(\text{RLLRRC}) = (\text{RLLRRC})^\infty, \end{aligned}$$

para as quais é imediatamente válida a cadeia de desigualdades:

$$P^{(1)} \prec P^{(2)} \prec P^{(5)} \prec P^{(3)} \prec P^{(4)} \prec P^{(6)}.$$

Sejam x_1, x_2, \dots, x_6 os pontos do intervalo, cujos itinerários são exactamente as sequências acima, isto é, tais que,

$$P^{(k)} = \text{it}(x_k),$$

para $k = 1, 2, \dots, 6$. De seguida, vamos construir os subintervalos definidos por estas sequências/pontos, que constituem a desejada partição do intervalo:

$$I_1 = (x_1, x_2) \quad I_2 = (x_2, x_5) \quad I_3 = (x_5, x_4) \quad I_4 = (x_3, x_4) \quad I_5 = (x_4, x_6).$$

Através da própria definição de itinerário do ponto crítico, podemos perceber que as imagens destes abertos pela aplicação f satisfazem

$$\begin{aligned} f(I_1) &= I_2 \cup I_3 \\ f(I_2) &= I_4 \cup I_5 \\ f(I_3) &= I_5 \\ f(I_4) &= I_3 \cup I_4 \\ f(I_5) &= I_1 \cup I_2. \end{aligned}$$

Deste modo, temos a seguinte matriz de transição de intervalos de Markov associada a este invariante de amassamento:

$$A_{\text{RLLRRC}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tal como foi anunciado no seu início, terminaremos esta secção apresentando a construção da matriz de transição de Markov associada ao invariante de amassamento de uma transformação β no intervalo.

A concretização da ideia de construir uma matriz de transição de Markov associada ao invariante de amassamento de uma transformação β no intervalo foi feita por Sousa Ramos e Nuno Martins, ver [78]. Tratando-se ainda de uma aplicação no intervalo cujo invariante de amassamento se reduz a uma única sequência simbólica, é natural que o procedimento seja em tudo idêntico ao anteriormente apresentado para as aplicações quadráticas, pelo que não vemos necessidade de o repetir com o detalhe com que foi apresentada a construção para essa família de aplicações no intervalo. A grande diferença que convém salientar passa pelo facto de neste caso todo o intervalo ser dinamicamente significativo, não havendo assim lugar a qualquer redução da partição do intervalo.

Seja $K_{f_\beta} = P_1 P_2 \cdots P_n C$ o invariante de amassamento de uma transformação β no intervalo. Pelo que ficou exposto atrás, sabemos que $x_{n+1} = 1$, isto é, o extremo direito do intervalo onde a dinâmica está definida. Assim sendo, a importante cadeia de desigualdades entre os pontos da órbita de $x = 1$ é dada por

$$0 < x_{\rho(1)} < x_{\rho(2)} < \cdots < x_{\rho(n)} < x_{\rho(n+1)} = x_{n+1} = 1.$$

Deste modo, a partição do intervalo, $\mathcal{C}_{K_{f_\beta}} = \{I_1, I_2, \cdots, I_{n+1}\}$, é dada por

$$\begin{aligned} I_1 &= (0, x_{\rho(1)}) \\ I_2 &= (x_{\rho(1)}, x_{\rho(2)}) \\ &\vdots \\ I_{n+1} &= (x_{\rho(n)}, 1). \end{aligned}$$

A matriz de transição de Markov surge assim de forma análoga.

Definição 4.8. *Seja f_β uma transformação β no intervalo cujo invariante de amassamento, K_{f_β} , é periódico de período $n + 1$. Denotemos por $\mathcal{C}_{K_{f_\beta}}$ a colecção de $n + 1$ subintervalos associada a K_{f_β} . Chamaremos matriz de transição de Markov associada a K_{f_β} à matriz quadrada, de ordem $n + 1$, $A_{K_{f_\beta}} = (a_{ij})$, dada por,*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } f(I_i) \supset I_j; \\ 0 & \text{de outro modo.} \end{cases}$$

O seguinte exemplo ilustra a construção apresentada.

Exemplo 12. *Seja $K_{f_\beta} = (1100100C)^\infty$ o invariante de amassamento de uma transformação β no intervalo. Então, facilmente se retira que os pontos x_k tais que $it(x_k) = \sigma^k(K_{f_\beta})$ satisfazem a cadeia de desigualdades*

$$0 < x_5 < x_2 < x_6 < x_3 < x_7 < x_4 < x_1 < x_8 = 1.$$

Deste modo, a partir destes pontos podemos proceder à construção dos abertos que vão resultar a partição $\mathcal{C}_{(1100100C)^\infty}$. Uma análise das imagens desses abertos permite-nos então obter a matriz de transição de Markov associada à dinâmica da transformação de invariante de amassamento $(1100100C)^\infty$,

$$A_{K_{(1100100C)^\infty}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observação 4.5. *Pelo que ficou anteriormente exposto, sabemos que o raio espectral desta matriz iguala o valor de β cuja transformação tem como invariante de amassamento a sequência dada. Uma computação simples mostra que esse valor é $\beta \approx 1.71888$*

4.4 O formalismo da matriz Θ

Em finais da década de 1980, logo após a construção da matriz de transição associada à sequência de amassamento de uma aplicação modal no intervalo, Sousa Ramos concebeu um formalismo que correspondesse, não a uma transição entre subintervalos, mas sim a uma transição de pontos. É essa a ideia que está na base daquilo que hoje se pode chamar formalismo da matriz Θ . Já no início da década de 2000, Nuno Martins, [78], desenvolveu e aplicou este formalismo ao cálculo dos grupos de Bowen-Franks associados a invariantes de amassamento de aplicações no intervalo, evidenciando então as potencialidades que

esse formalismo alternativo às Cadeias de Markov Topológicas mostrava no estudo das dinâmicas. Esta apresentação das ideias de Sousa Ramos baseia-se essencialmente na exposição feita em [78] e [81].

Contrariamente ao que tem sido feito ao longo deste capítulo, desta vez vamos começar por apresentar o formalismo da matriz Θ para a família das aplicações quadráticas e só depois para a família das transformações β no intervalo.

Denotemos por K_a a sequência de amassamento da aplicação quadrática no intervalo $f_a(x)$. Para simplificar, vamos admitir que K_a é uma sequência finita, de comprimento $n + 1$, isto é, que $K_a = (P_1 P_2 \cdots P_n C)^\infty$. Então, existem pontos x_k pertencentes ao intervalo tais que

$$\text{it}(x_k) = \sigma^{(k-1)}(K_a),$$

onde teremos que o ponto x_{n+1} é exactamente igual ao ponto crítico de f_a , que passaremos a escrever $x_c = c$.

Observação 4.6. *Como vimos anteriormente, são exactamente estes pontos que nos permitem construir a matriz de transição de Markov $A_{K_{f_a}}$ associada à dinâmica f_a .*

Seja ρ a permutação tal que deixa válida a seguinte cadeia de desigualdades:

$$0 < x_{\rho(1)} < x_{\rho(2)} < \cdots < x_{\rho(n)} < x_{\rho(n+1)} < 1.$$

Como é óbvio, são estes pontos que nos vão permitir construir uma partição do intervalo e daí chegar à Cadeia de Markov Topológica. Para simplificar, vamos escrever estes pontos como $y_i = x_{\rho(i)}$.

Consideremos a partição $\{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$ dada pelos subintervalos

$$I_k = (y_k, y_{k+1}), \quad k = 1, \cdots, n.$$

Denotemos por \mathcal{C}_0 e \mathcal{B}_0 os espaços vectoriais das 0-cadeias gerados, repectivamente, pelos pontos $\{x_i\}$ e pontos $\{y_i\}$, para $i = 1, 2, \cdots, n + 1$. Denotemos ainda por \mathcal{C}_1 o espaço vectorial das 1-cadeias gerado pelos intervalos $\{I_k\}$, para $k = 1, 2, \cdots, n$. Atendendo à sua definição, temos que $\partial I_k = x_{k+1} - x_k$, onde por $\partial : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{B}_0$ se denota a habitual aplicação fronteira.

Consideremos agora o grafo definido por $(\mathcal{B}_0, \mathcal{C}_1, \partial)$ e seja φ a sua matriz de incidência. Por último, consideremos as seguintes matrizes: $\eta = \varphi \pi$, onde $\pi = (\delta_{\rho(i),j})$ é a matriz associada à permutação ρ , e ω a matriz quadrada de ordem $n+1$ correspondente à rotação induzida na sequência de amassamento pela aplicação deslocamento σ , isto é,

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Então, existe um endomorfismo $\alpha : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1$ por forma a que o seguinte diagrama seja comutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_0 & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{C}_1 \\ \omega \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathcal{C}_0 & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{C}_1 \end{array}$$

ou seja, temos que

$$\alpha = \eta \omega \eta^\top (\eta \eta^\top)^{-1}.$$

Definindo uma matriz $\gamma = (\gamma_{ij})$, quadrada, de ordem $n+1$, cujos únicos elementos não nulos estão na diagonal e na última coluna e são dados por

$$\begin{cases} \gamma_{i,i} = \varepsilon_i(c) & i = 1, \dots, n+1 \\ \gamma_{i,n+1} = -\varepsilon_i(c) & i = 1, \dots, n+1 \end{cases}$$

podemos construir uma matriz $\Theta_{K_{fa}}$, dada por

$$\Theta_{K_{fa}} = \gamma \omega.$$

Verifica-se então que o seguinte diagrama é um diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_0 & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{C}_1 \\ \Theta_{K_{fa}} \downarrow & & \downarrow A_{K_{fa}} \\ \mathcal{C}_0 & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{C}_1 \end{array} \quad (4.5)$$

A forma explícita da matriz $\Theta_{K_{fa}}$ pode ser obtida como

$$\Theta_{K_{fa}} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1(c) & \varepsilon_1(c) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\varepsilon_2(c) & 0 & \varepsilon_2(c) & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -\varepsilon_{n-1}(c) & 0 & 0 & & \varepsilon_{n-1}(c) & 0 \\ -\varepsilon_n(c) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon_n(c) \\ -\varepsilon_{n+1}(c) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde, por definição, uma vez que $S_{n+1} = C$, temos que $\varepsilon_{n+1}(c) = 0$. Para ilustrar estes conceitos, vamos já de seguida apresentar a construção da matriz Θ para uma determinada sequência de amassamento.

Exemplo 13. Consideremos a seguinte sequência de amassamento de uma aplicação quadrática no intervalo $K = (RLLRLC)^\infty$. Temos então a matriz de transição correspondente dada por

$$A_{(RLLRLC)^\infty} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sendo a matriz $\Theta_{(RLLRLC)^\infty}$ dada por,

$$\Theta_{(RLLRLC)^\infty} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um dos resultados mais interessantes relativamente a este novo formalismo tem o seguinte enunciado, cuja prova pode ser vista em [78].

Proposição 4.3. Seja K_{fa} a sequência de amassamento de uma aplicação quadrática no intervalo e sejam $A_{K_{fa}}, \Theta_{K_{fa}}$ as correspondentes matrizes de transição de Markov e do formalismo Θ , respectivamente. Então, temos que

$$\det(I_{n+1} - t \Theta_{K_{fa}}) = t \det(I_n - t A_{K_{fa}}),$$

com $n + 1$ o comprimento da sequência K_{fa} .

De seguida vamos apresentar este mesmo formalismo, mas agora para a família das transformações β no intervalo. Para tal, vamos seguir, com os devidos ajustes, a exposição feita em [78] para a família mais geral das transformações (β, α) no intervalo.

Tratando-se também de uma família de aplicações no intervalo com um invariante de amassamento dado exclusivamente por uma sequência, o itinerário do ponto $x = 1$, podemos prever que muito daquilo que foi exposto para o formalismo Θ relativo à família das aplicações quadráticas no intervalo seja também válido neste caso.

Tal como fizemos anteriormente, consideremos o alfabeto $\mathcal{A} = \{0, C, 1\}$ associado à família das transformações β no intervalo e seja K_β a sequência de amassamento, finita, de comprimento $n + 1$, da transformação $f_\beta(x)$. A partir daqui temos um formalismo em tudo idêntico ao anterior, excepto no que concerne à matriz $\gamma = (\gamma_{ij})$, que, neste caso, tem como únicos elementos possivelmente não nulos,

$$\begin{cases} \gamma_{i,i} = \delta(P_i) & i = 1, \dots, n+1 \\ \gamma_{i,n+1} = -\delta(P_i) & i = 1, \dots, n+1 \end{cases}$$

com $\delta(0) = 0$, $\delta(C) = 0$ e $\delta(1) = 1$. De uma forma equivalente, podemos apresentar a matriz $\Theta_{K_{f_\beta}}$, desta vez em termos dos símbolos da sequência de amassamento, como

$$\Theta_{K_{f_\beta}} = \begin{pmatrix} P_1(c) & P_1(c) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_2(c) & 0 & P_2(c) & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ P_{n-1}(c) & 0 & 0 & & P_{n-1}(c) & 0 \\ P_n(c) & 0 & 0 & \dots & 0 & P_n(c) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um exemplo ilustrará o modo como se constrói esta matriz $\Theta_{K_{f_\beta}}$.

Exemplo 14. *Seja $K_{f_\beta} = (11000)^\infty$ a sequência de amassamento de uma transformação β no intervalo. Então, como sabemos, a sua matriz de transição de Markov é dada por*

$$A_{(11000)^\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pelo que ficou exposto atrás, temos que a matriz do formalismo Θ correspondente a esta sequência de amassamento é dada por

$$\Theta_{(11000)^\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como foi salientado a quando da construção da matriz de transição associada à sequência de amassamento de uma transformação β no intervalo, a necessidade de considerarmos o extremo esquerdo do intervalo, $x = 0$, leva a que as dimensões de ambas as matrizes sejam exactamente iguais. Assim sendo, a igualdade correspondente a (4.3) fica mais simples.

Proposição 4.4. *Seja K_{f_β} a sequência de amassamento de uma transformação β no intervalo e sejam $A_{K_{f_\beta}}, \Theta_{K_{f_\beta}}$ as correspondentes matrizes de transição de Markov e do formalismo Θ , respectivamente. Então, temos que*

$$\det(I_n - t \Theta_{K_{f_\beta}}) = \det(I_n - t A_{K_{f_\beta}}),$$

com n o comprimento da sequência K_{f_β} .

No capítulo que se segue iremos perceber como este formalismo é uma importante alternativa ao das Cadeias de Markov Topológicas. Tal como foi perceptível em [78], com a demonstração de regularidades nos grupos de Bowen-Franks para certas famílias de aplicações no intervalo, também agora vamos aproveitar a forma como os elementos não nulos se dispõem na matriz Θ para efectuar cálculos que de outro modo, isto é, a partir da matriz de transição de Markov, seriam extraordinariamente complicados, para não dizer mesmo impossíveis.

Capítulo 5

Função zeta para aplicações no intervalo

A presunção inicial que a generalização para sistemas dinâmicos das funções zeta, originalmente introduzidas num contexto de teoria de números, levaria naturalmente a algo interessante, não pode ser considerada óbvia. Contudo, nas últimas décadas, tem-se procurado entender o significado dinâmico mais profundo de tais funções, sendo hoje possível dizer que se trata, efectivamente, de uma função importante na caracterização da evolução temporal de um sistema. Tal como tão bem escreveu David Ruelle, [117], *the Riemann zeta function was introduced to study statistical properties of prime numbers [and we know now that] dynamical zeta functions are related to the thermodynamical formalism, hence to ergodic theory and, again, to statistical properties*. Neste último capítulo, vamos então abordar o problema do cálculo da função zeta dinâmica, naturalmente no âmbito mais específico das aplicações modais no intervalo.

A função zeta dinâmica de f , originalmente proposta por Michael Artin e Barry Mazur, é dada pela seguinte expressão:

$$\zeta_f(z) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \#(\text{Fix } f^k), \quad (5.1)$$

onde por $\#(\text{Fix } f^k)$ se denota o número de pontos fixos de f^k , sempre suposto em número finito, e onde, como é habitual, se entende que

$$\exp a = 1 + a + a^2/2! + a^3/3! + \dots$$

Contudo, é preciso fazer notar que a igualdade acima deve ser entendida como uma

igualdade formal, uma vez que não está de forma alguma assegurada, e em que condições, a definição da expressão que se apresenta do lado direito.

Construída a partir do número dos pontos periódicos da dinâmica, resulta de imediato a invariância por conjugação topológica de ζ_f . Para além disso, as mesmas razões fazem desde logo suspeitar a existência de uma estreita relação entre a função zeta e o número de crescimento da dinâmica em causa. Para termos uma noção um pouco mais concreta do que é a função zeta de uma dinâmica, pensemos em alguns exemplos para os quais o cálculo proposto é para além de possível, bastante fácil: seja f uma aplicação cuja dinâmica se resume unicamente a uma órbita periódica de período p . Então, temos que

$$\begin{aligned}\zeta_f(z) &= \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \#(\text{Fix } f^k) \\ &= \exp(z^p + z^{2p}/2 + z^{3p}/3 + \dots) = \exp(-\log(1 - z^p)),\end{aligned}$$

isto é,

$$\zeta_f(z) = (1 - z^p)^{-1} = 1 + z^p + z^{2p} + \dots.$$

Como era de esperar, nesta expressão temos todos os termos de potências kp , com $k \in \mathbb{N}$, pelo simples facto de uma qualquer órbita periódica de período p ser inevitavelmente percebida como uma órbita periódica de período kp .

Uma forma muito elegante de apresentar a função ζ_f de uma dinâmica é através da chamada fórmula do produto de Euler,

$$\zeta_f(z) = \prod_{\text{orb}_f} (1 - z^p)^{-1}, \quad (5.2)$$

onde desta vez o produto se estende por todas as órbitas periódicas primitivas, orb_f , da dinâmica em causa, denotando-se por p o respectivo período. De seguida vamos continuar a apresentar alguns exemplos, sobretudo para ilustrar alguns aspectos do cálculo da função zeta, nomeadamente a sua dificuldade. Como veremos, a escolha das dinâmicas vai ser feita por sabermos de antemão todas as órbitas por ela admitidas.

Exemplo 15. *Consideremos uma dinâmica quadrática no intervalo correspondente ao ponto de Feigenbaum da primeira cascata de bifurcações de duplicação do período, isto é, cuja sequência de amassamento seja dada por $K_f = R^{*\infty}$. Nesse caso, sabemos que*

a dinâmica admite, para além de dois pontos fixos, uma órbita periódica de período 2^k , para todo $k \in \mathbb{N}$, pelo que o recíproco de ζ_f pode ser escrito explicitamente como

$$1/\zeta_f(z) = (1 - z) \prod_{n=0}^{\infty} (1 - z^{2^n}).$$

Vejamos ainda um segundo exemplo.

Exemplo 16. Permanecendo ainda no âmbito das aplicações quadráticas no intervalo, seja f uma aplicação cuja sequência de amassamento é dada por $K_f = \text{RL}^\infty$. Como podemos ver, estamos agora na situação em que a restrição da aplicação f aos subintervalos esquerdo e direito é um homeomorfismo. Sendo assim, facilmente podemos concluir que, para todo $k \in \mathbb{N}$, f^k cruza $2k$ vezes a recta $y = x$. Deste modo, voltando à sua expressão original, (5.1), temos que

$$\zeta_f(z) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} z^k = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2z)^k}{k},$$

podendo assim escrever que

$$1/\zeta_f(z) = 1 - 2z.$$

Como sabemos, estes dois exemplos de dinâmicas, relativamente às quais obtivemos a expressão das suas funções zeta, pertencem a uma família de dinâmicas no intervalo que iremos ainda estudar com alguma profundidade. Existe, contudo, uma grande família de dinâmicas cujas funções zeta são também muito fáceis de estabelecer, os *shifts* de tipo finito.

Exemplo 17. Seja (Σ_A, σ) um shift de tipo finito descrito pela matriz A , quadrada, de dimensão N , de elementos pertencentes a $\{0, 1\}$. Então, uma vez que é válida a igualdade

$$\#(\text{Fix } \sigma^k) = \text{tr } A^k,$$

temos que a função zeta desta dinâmica, que habitualmente se denota por ζ_A , para reforçar a descrição algébrica da dinâmica em causa, apresenta-se como

$$\zeta_A(z) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \#(\text{Fix } \sigma^k) = \det(1 - zA).$$

5.1 A função zeta de uma aplicação quadrática no intervalo

Como foi anteriormente referido, em finais da década de 1970, John Milnor e William Thurston apresentaram um formalismo que permitia estudar a dinâmica de aplicações no intervalo tais que este pudesse ser dividido número finito de subintervalos onde a aplicação fosse monótona. Como o mostraram ainda Milnor e Thurston, esse formalismo de amassamento permite igualmente calcular a função zeta de qualquer uma dessas dinâmicas, de uma forma muito fácil e elegante. Uma vez que os resultados que iremos apresentar se referem explicitamente a aplicações unimodais no intervalo, vamos escrever o resultado de Milnor e Thurston nesse mesmo contexto.

A expressão obtida para a função zeta de uma aplicação quadrática no intervalo exige uma condição que é satisfeita sempre que esta é um polinómio, ou uma função racional, de grau superior ou igual a 2, ou sempre que a aplicação em causa tenha derivada schwarziana negativa no interior de ambos os subintervalos de monotonia. Podemos assim concluir estarmos perante uma hipótese muito pouco limitadora.

Teorema 5.1 (Milnor e Thurston). *Seja f uma aplicação quadrática no intervalo, com um número finito de pontos periódicos instáveis. Então, o recíproco da sua função zeta apresenta-se como o produto do seu determinante de amassamento por um polinómio ciclotómico,*

$$1/\zeta_K(z) = D_K(z) P(z), \quad (5.3)$$

onde por $K = K_f$ se denota a sequência de amassamento de f , por D_K o seu determinante de amassamento e por P um qualquer polinómio ciclotómico.

Para além da expressão (5.3), os mesmos autores mostraram também que o raio de convergência da igualdade era exactamente o recíproco do número de crescimento da aplicação em causa, isto é, que

$$1/\zeta_K(z) = D_K(z) P(z), \quad |z| < 1/s,$$

com $s = s_f$ o número de crescimento da aplicação f . Mas a contribuição de Milnor e

Thurston foi um pouco mais longe, ao conseguir identificar o polinómio ciclotómico em duas diferentes situações, consoante o itinerário da imagem por f do ponto crítico de f fosse, ou não, uma sequência periódica.

Proposição 5.1. *Seja f uma aplicação quadrática no intervalo, com um número finito de pontos periódicos instáveis, e denotemos por $K = K_f$ a sua sequência de amassamento. Se a sequência simbólica K é periódica, de período p , temos que*

$$1/\zeta_K(z) = (1 - z)(1 - z^p) D_K(z).$$

Contudo, se tal não se verificar, temos então que

$$1/\zeta_K(z) = (1 - z) D_K(z).$$

Vemos assim que é a matriz de amassamento, no caso de uma aplicação quadrática uma matriz de dimensão 1×2 , cujos elementos são séries de potências cuja expressão depende do aparecimento de cada um dos símbolos na sequência de amassamento da aplicação, que vai reter a informação da dinâmica de f necessária para a construção da função ζ_f . Por outras palavras, na estratégia proposta por Milnor e Thurston, essa construção não vai passar já pelo conhecimento dos pontos periódicos, ou das órbitas periódicas, de f . Como consequência, torna-se extremamente simples apresentar a função zeta de uma aplicação, bastando para tal saber exactamente qual o endereço de todas as iteradas do seu ponto crítico. Vejamos agora como é possível, através ao Teorema de Milnor e Thurston, obter ζ_f , com mais dois exemplos de aplicações quadráticas no intervalo.

Exemplo 18. *Seja f uma aplicação quadrática no intervalo cuja sequência de amassamento é uma sequência periódica dada por $K = RLLRRC^\infty$. Sendo assim, verifica-se facilmente que a sua matriz de amassamento é dada por*

$$N_K = \begin{pmatrix} -1 + (2t^2 + 2t^3)(1 + t^6 + \dots) & -1 + (2 - 2t + 2t^4 - 2t^5)(1 + t^6 + \dots) \end{pmatrix},$$

obtendo-se igualmente de imediato o seu determinante de amassamento, isto é,

$$D_K = \frac{1 - (2t^2 + 2t^3)(1 + t^6 + \dots)}{1 + t} = \frac{1 - t - t^2 - t^3 + t^4 - t^5}{1 - t^6}.$$

Pelo Teorema 5.1 podemos então dizer que o recíproco da função zeta da aplicação f é dado pelo polinómio

$$1/\zeta_f(z) = (1 - z)(1 - z - z^2 - z^3 + z^4 - z^5), \quad |z| < 1/s,$$

com $s \approx 1.7924$.

Exemplo 19. Consideremos agora uma outra aplicação quadrática no intervalo f , desta vez com uma sequência de amassamento eventualmente periódica, dada por $K = RLR^\infty$. Um cálculo bastante simples leva-nos de imediato a concluir que a sua matriz de amassamento é dada por

$$N_K = \begin{pmatrix} -1 + 2t^2 & 1 - 2t + 2t^3(1 - t + t^2 - t^3 + \dots) \end{pmatrix},$$

e, naturalmente, que o seu determinante de amassamento vem como

$$D_K = \frac{1 - 2t^2}{1 + t}.$$

Deste modo, podemos escrever o recíproco da sua função zeta como

$$1/\zeta_f(z) = \frac{(1 - z)(1 - 2z^2)}{1 + z}, \quad |z| < 1/s,$$

desta vez com $s = \sqrt{2}$.

Como deve ser perceptível pelos dois exemplos anteriores, o Teorema 5.1 torna o cálculo da função zeta extremamente simples, sobretudo nos casos de aplicações quadráticas com sequências de amassamento periódicas ou eventualmente periódicas. No entanto, se é certo que o citado teorema responde à questão inicialmente colocada de escrever a função zeta de uma qualquer aplicação quadrática no intervalo, também não deixa de ser verdade que a utilização de um formalismo de tal forma restrito a essa família de aplicações não possibilita qualquer generalização a outras aplicações. Nesse sentido, julgamos muito importante o trabalho de José Sousa Ramos na construção de uma partição de Markov do intervalo a partir do itinerário do ponto crítico da aplicação. Estamos assim perante uma ponte entre o formalismo de amassamento e uma forma de estudar a dinâmica que se estende a um grande número de tipos de aplicações.

Deste modo, vamos colocar exactamente o mesmo problema, do cálculo da função zeta para uma aplicação quadrática no intervalo, mas agora tentando encontrar uma solução através da construção, devida a Sousa Ramos, de uma partição de Markov do intervalo. Para simplificar, vamos começar por distinguir classes de aplicações de acordo com a sua sequência de amassamento.

Seja f uma qualquer aplicação quadrática no intervalo e denotemos por $K = K_f$ a sua sequência de amassamento. Como referimos anteriormente, diz-se que a sequência simbólica K é finita caso contenha um símbolo C , isto é, se se escreve como

$$K = (S_1 \cdots S_{p-1} C)^\infty = S_1 \cdots S_{p-1} C,$$

onde se supõe que nenhum dos símbolos S_k , para $k = 1, \dots, p-1$, é igual a C . Caso contrário, vamos dizer que K é infinita. No caso de K ser uma sequência infinita, é conveniente distinguir três situações: infinita periódica, infinita pré-periódica, ou infinita aperiódica.

Como Sousa Ramos mostrou nos seus trabalhos, para todas as situações excepto a última, existe uma forma de proceder que nos conduz à construção de uma partição de Markov do intervalo com um número finito de subintervalos e assim a uma matriz de transição de Markov de dimensão finita. Desse modo, o resultado abaixo vai ser um mero reflexo dessa construção, uma vez que repete aquilo que tinha sido já estabelecido para a função zeta de qualquer *subshift* de tipo finito.

Teorema 5.2 (Sousa Ramos). *Seja K uma sequência de amassamento quadrática finita, infinita periódica ou infinita pré-periódica. Então, temos que*

$$1/\zeta_K(z) = \det(1_n - z A_K),$$

onde por A_K denotamos a matriz de transição de Markov, de dimensão n , associada a K .

Como facilmente se depreende, ficou por estudar a situação em que a sequência de amassamento é infinita aperiódica, cuja primeira dificuldade está desde logo no facto do

formalismo de Sousa Ramos lhe associar uma cadeia de Markov topológica de dimensão infinita, numerável. Aquilo que nos propomos fazer é exactamente resolver esse problema, isto é, estudar o problema do cálculo da função zeta de uma aplicação quadrática no intervalo cuja sequência de amassamento seja infinita aperiódica.

Se considerarmos o conjunto das sequências de amassamento quadráticas com a estrutura de árvore proposta por Sousa Ramos, e descrita no Capítulo 3, facilmente se percebe que, de todas as sequências de amassamento infinitas, é possível distinguir claramente duas situações: aquelas sequências passíveis de serem alcançadas através de um caminho sobre a árvore e aquelas outras que não se enquadram nessa ideia, uma vez que não se relacionam com qualquer outra sequência de amassamento quadrática finita. De seguida procuraremos formalizar estas ideias.

Definição 5.1. *Uma sequência de amassamento quadrática infinita $S = S_1S_2 \cdots$ diz-se aproximadamente finita se existe uma ordem $N \in \mathbb{N}$ a partir da qual, para todo $n > N$, $S^n = S_1S_2 \cdots S_nC$ é uma sequência de amassamento quadrática. Nesse caso podemos dizer que*

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n.$$

Se aproximadamente finita nos parece uma boa forma de descrever estas sequências de amassamento, naturalmente que aquelas que não satisfazem a condição acima descrita poderão ser chamadas sequências de amassamento puramente infinitas.

Definição 5.2. *Uma sequência de amassamento quadrática infinita $S = S_1S_2 \cdots$ diz-se puramente infinita se, para algum $N \in \mathbb{N}$, nenhuma das sequências $S^n = S_1S_2 \cdots S_nC$, com $n > N$, é uma sequência de amassamento quadrática.*

É importante realçar desde logo que esta classificação não esgota todas as possibilidades. Vejamos alguns exemplos para ilustrar este facto e as definições propostas.

Exemplo 20. *A sequência $S = RL^\infty$ é uma sequência de amassamento quadrática aproximadamente finita. De facto, trata-se de uma sequência infinita que pode ser obtida percorrendo o ramo mais à direita da árvore das sequências de amassamento quadráticas.*

Exemplo 21. A sequência $S = (RL)^\infty$ é uma sequência de amassamento quadrática puramente infinita. Como facilmente se verifica, exceptuando as primeiras três sequências, RC , RLC e $RLRC$, quaisquer outras tentativas de se obter uma sequência de amassamento a partir de uma subsequência inicial de S estão manifestamente condenadas ao insucesso.

Exemplo 22. A sequência $S = RLRLRRRLRRRRRL \dots$ é uma sequência de amassamento quadrática que não é nem aproximadamente finita, nem puramente infinita. De facto, não é muito difícil de concluir que sempre que o último símbolo, S_n , é igual a L , estaremos perante uma sequência S^n que claramente é não admissível. Por outro lado, facilmente se constata que qualquer outra situação nos conduz a uma sequência S^n que é de facto uma sequência de amassamento quadrática. Deste modo, atentando na sua forma de construção, podemos assegurar que a sequência infinita apresentada, não sendo uma sequência puramente infinita, não é também uma sequência aproximadamente finita.

A relevância da classificação proposta para as sequências de amassamento infinitas ficará patente no que se segue.

5.2 O teorema fundamental

Para tornar mais simples a apresentação do nosso resultado principal, vamos começar por mostrar que a função zeta ζ_K associada a uma qualquer sequência de amassamento K aproximadamente finita e aperiódica tem uma expressão que traduz uma generalização imediata do caso finito.

Teorema 5.3. *Seja S uma sequência de amassamento quadrática aperiódica aproximadamente finita. Então, temos que*

$$1/\zeta_S(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n z^n,$$

com $\epsilon_n = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$, e onde por ε_k se denotam os símbolos de amassamento associados a cada um dos símbolos S_k que compõem a sequência S .

A demonstração que vamos apresentar baseia-se no trabalho de Omri Sarig, [?], onde o autor mostra que a função zeta de uma dinâmica caracterizada por uma determinada matriz de transição, de dimensão infinita, tem uma certa forma. Na sua argumentação, Sarig aproveita-se essencialmente da estrutura da matriz de transição, isto é, da posição dos seus elementos diferentes de zero, para introduzir certas matrizes de dimensão finita, submatrizes da matriz inicial, que conservam exactamente essa mesma estrutura. Desse modo, vai-lhe ser possível apresentar resultados para a situação finita e ainda acompanhar todo o processo de passagem ao infinito. Ora, como é óbvio, esta ideia de Sarig não é generalizável para o caso geral de uma matriz de transição associada a uma qualquer sequência de amassamento aperiódica, uma vez que não só não é conhecida a estrutura da matriz de transição, como também as matrizes de dimensão finita construídas a partir da matriz de transição perdem toda a informação dinâmica. Torna-se necessário contornar a questão.

Como vamos ver já de seguida, a solução para este problema passa pela representação da dinâmica pelo formalismo da matriz Θ introduzido por Sousa Ramos e descrito no Capítulo 2. De facto, é essa passagem que nos vai permitir encarar o problema em toda a sua generalidade, uma vez que a matriz Θ associada a qualquer sequência de amassamento mostra sempre uma mesma estrutura na posição dos seus elementos não nulos e certas suas submatrizes são ainda dinamicamente relevantes.

Seja $S = S_1 S_2 \cdots$ uma sequência de amassamento quadrática aperiódica aproximadamente finita. Então, por definição, temos que, a partir de uma certa ordem N , todas as sequências simbólicas $S^n = S_1 S_2 \cdots S_n C$ são sequências de amassamento. Denotemos por $A_n = A_{S^n}$ a matriz de transição de Markov associada à sequência de amassamento finita S^n . De forma análoga, denotemos por Θ_S a matriz do formalismo Θ associada à sequência de amassamento $S = S_1 S_2 \cdots$ e por Θ_n a matriz associada a cada uma das sequências de amassamento S^n . Pelo que atrás ficou mostrado, a equivalência dinâmica dos dois formalismos permite-nos escrever que, para todo $n > N$, isto é, para todo n para o qual se encontra garantido que as sequências $S_1 S_2 \cdots S_n C$ são sequências

de amassamento,

$$\begin{aligned}\det(1 - zA_n) &= \det(1 - z\Theta_n) \\ \text{tr } A_n &= \text{tr } \Theta_n.\end{aligned}\tag{5.4}$$

De igual modo, para o caso infinito temos que, estando garantida a existência do determinante e do traço das matrizes, então são verdadeiras as igualdades

$$\begin{aligned}\det(1 - zA_S) &= \det(1 - z\Theta_S) \\ \text{tr } A_S &= \text{tr } \Theta_S.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Por definição, sabemos que a função zeta da dinâmica cuja sequência de amassamento é S é dada por

$$\zeta_S(z) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} Z_n,$$

onde por Z_n se denota o número de pontos fixos da iterada n da dinâmica. O resultado seguinte diz-nos como pode ser encontrado este número.

Lema 5.1. *Fixado $N \in \mathbb{N}$, temos que, para todo o inteiro positivo $n \leq N$,*

$$Z_n = \text{tr } A_N^n.$$

Prova: Este resultado é importante na medida em que nos vai permitir calcular Z_n evitando a matriz de transição de dimensão infinita. Atente-se que é precisamente neste ponto que se torna necessário fazer apelo à hipótese da sequência simbólica S ser uma sequência de amassamento aproximadamente finita, uma vez que deste modo fica assegurada a existência de uma matriz de transição A_N , qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, com $n < N$, como está subentendido no resultado acima.

Fixemos um qualquer valor $N \in \mathbb{N}$, escolhido suficientemente grande por forma a que a sequência S^N seja uma sequência de amassamento. Dada a estrutura muito particular da matriz Θ_N associada à sequência de amassamento S^N ,

$$\Theta_N = \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\varepsilon_2 & 0 & \varepsilon_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ -\varepsilon_N & 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

podemos desde logo estabelecer a forma da sua potência n , isto é, que, para $n \leq N$, os elementos não nulos da matriz $\Theta_N^n = (\theta_{ij}^n)$, com $i, j = 1, \dots, N+1$, se encontram exclusivamente nas suas primeiras n colunas e, no caso em que n seja estritamente inferior a N , nas posições $(k, k+1)$, para $k = n+1, \dots, N$. Sendo assim, vamos de seguida mostrar que os elementos θ_{ij}^n , para $i, j = 1, \dots, n$, dependem apenas de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+i-j}$.

Como um pequeno cálculo mostra, se $n = 2$, temos explicitamente

$$\begin{aligned} \theta_{11}^2 &= \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 & \theta_{12}^2 &= \varepsilon_1^2 \\ \theta_{21}^2 &= \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 & \theta_{22}^2 &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \end{aligned}$$

donde é válida a afirmação. Suponhamos agora que essa afirmação é também válida para n e analisemos o que se passa para a potência $n+1$ da matriz Θ_N . Ora, dado que

$$\theta_{i,j}^{n+1} = \sum_{k=1}^N \theta_{i,k}^n \theta_{k,j}$$

temos, para $j \neq 1$, que

$$\theta_{i,j}^{n+1} = \theta_{i,j-1}^n \theta_{j-1,j} = \varepsilon_j \theta_{i,j-1}^n.$$

Deste modo, uma vez que, por hipótese, $\theta_{i,j-1}^n$ dependem apenas de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+i-(j-1)}$, podemos concluir que, de facto, os elementos $\theta_{i,j}^{n+1}$ dependem apenas de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1+i-j}$.

Mesmo para a situação que evitámos, $j = 1$, temos que

$$\theta_{i,1}^{n+1} = \sum_{k=1}^N \theta_{i,k}^n \theta_{k,1} = \sum_{k=1}^n \theta_{i,k}^n \theta_{k,1} = \sum_{k=1}^n -\varepsilon_k \theta_{i,k}^n,$$

donde, uma vez que, por hipótese, os elementos $\theta_{i,k}^n$ dependem apenas de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+i-k}$, para $k = 1, \dots, n$, podemos afirmar que também os elementos da primeira coluna da matriz Θ_N^{n+1} dependem apenas de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1+i-1}$.

Os argumento apresentado permite-nos afirmar que todos os elementos da diagonal da matriz Θ_N^n são nulos a partir da ordem $n+1$ e que aqueles que são diferentes de zero dependem exclusivamente dos símbolos $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Deste modo, escolhidos quaisquer $N, N' \in \mathbb{N}$, atendendo à forma das matrizes Θ_N e $\Theta_{N'}$, associadas às dinâmicas f_N e $f_{N'}$, cujas sequências de amassamento são, respectivamente, S^N e $S^{N'}$, podemos concluir imediatamente que

$$\text{tr } \Theta_N^n = \text{tr } \Theta_{N'}^n$$

sempre que $n \leq N, N'$. Assim sendo, por (5.4), temos que

$$\text{tr } A_N^n = \text{tr } \Theta_N^n = \text{tr } \Theta_{N'}^n = \text{tr } A_{N'}^n.$$

Dinamicamente, o resultado acima diz-nos que, para quaisquer $n \leq N < N'$, o número de pontos fixos de $f_{N'}^n$, não depende de N' mas apenas de n , sendo assim igual ao número de pontos fixos de f_N^n . Sendo este número constante para todo $N \geq n$, podemos concluir então que o número de pontos fixos de f^n é também igual ao número de pontos fixos de f_N^n , isto é, igual ao traço de A_N^n . Gostaríamos de reafirmar que este resultado pressupõe que, a partir de uma determinada ordem, todas as subsequências S^N são sequências de amassamento, o que está assegurado uma vez que S é uma sequência de amassamento aproximadamente finita. \square

Fixemos então um qualquer valor de $N \in \mathbb{N}$. Aquilo que o Lema 5.1 nos diz é que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} Z_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{tr } A_N^n \right| &= \left| \sum_{n>N}^{\infty} \frac{z^n}{n} Z_n - \sum_{n>N}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{tr } A_N^n \right| \\ &\leq \left| \sum_{n>N}^{\infty} \frac{z^n}{n} Z_n \right| + \left| \sum_{n>N}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{tr } A_N^n \right|. \end{aligned} \quad (5.6)$$

De seguida, vamos avaliar cada uma destas duas quantidades: para isso, denotemos por $\lambda_{1N}, \lambda_{2N}, \dots, \lambda_{NN}$ os valores próprios da matriz A_N . Ora, uma vez que A_N é uma matriz de transição correspondente a uma aplicação quadrática no intervalo, sabemos que existe um seu valor próprio que é igual ao raio espectral, isto é, que existe um valor próprio $\bar{\lambda}_N = \lambda_{kN}$ tal que $\bar{\lambda}_N \geq |\lambda_{jN}|$, para todo $j = 1, 2, \dots, N$. Recordemos que este valor próprio é o número de crescimento da aplicação quadrática f_N , sendo por isso um valor pertencente ao intervalo $[1, 2]$. Sendo assim, podemos afirmar que

$$|\text{tr } A_N^n| = |\lambda_{1N}^n + \lambda_{2N}^n + \dots + \lambda_{NN}^n| \leq N \bar{\lambda}_N^n.$$

Deste modo, temos que

$$\left| \sum_{n>N}^{\infty} \frac{z^n}{n} Z_n \right| = \left| \sum_{n>N}^{\infty} \frac{z^n}{n} \text{tr } A_n^n \right| \leq \sum_{n>N}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} n \bar{\lambda}_n^n = \sum_{n>N}^{\infty} |z|^n \bar{\lambda}_n^n,$$

pelo que, para valores de z tais que $|z| < \bar{\lambda}_n^{-1}$, podemos afirmar que é válido o seguinte limite:

$$\left| \sum_{n>N}^{\infty} \frac{z^n}{n} Z_n \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (5.7)$$

Por outro lado, sabemos também que

$$\left| \sum_{n>N}^{\infty} \frac{z^n}{n} \operatorname{tr} A_N^n \right| \leq \sum_{n>N}^{\infty} |z|^n \bar{\lambda}_N^n,$$

pelo que, desta vez para valores de z tais que $|z| < \bar{\lambda}_N^{-1}$, é possível concluir que

$$\left| \sum_{n>N}^{\infty} \frac{z^n}{n} \operatorname{tr} A_N^n \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (5.8)$$

Deste modo, pela desigualdade (5.6) e pelos resultados (5.7) e (5.8) acima apresentados,

temos que, para $|z| < \bar{\lambda}_N^{-1}$,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} Z_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \operatorname{tr} A_N^n \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Para completar a prova do resultado apresentado basta observar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \operatorname{tr} A_N^n = -\ln \det(1 - z A_N),$$

pelo que, para $|z| < \lambda^{-1}$, o seguinte limite é verdadeiro:

$$\ln \det(1 - z A_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\ln \zeta_S(z).$$

Deste modo, atendendo à igualdade (5.4) e à estrutura da matriz Θ_N , temos que

$$\det(1 - z A_N) = \det(1 - z \Theta_N) = 1 + \varepsilon_1 z + \varepsilon_1 \varepsilon_2 z^2 + \cdots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_N z^N.$$

Introduzindo os símbolos $\epsilon_k = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_k$, é possível simplificar um pouco a expressão anterior, vindo então

$$\det(1 - z A_N) = \det(1 - z \Theta_N) = 1 + \sum_{k=1}^N \epsilon_k z^k.$$

Assim sendo, temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \det(1 - z \Theta_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} 1 + \sum_{k=1}^N \epsilon_k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k z^k,$$

onde, uma vez que $|\epsilon_k| = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos concluir que a igualdade é válida no disco de raio 1. Deste modo, podemos escrever que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \det(1 - z A_n) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k z^k, \quad |z| < 1.$$

ou seja, que

$$1/\zeta_S(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k z^k,$$

para todo $|z| \leq \bar{\lambda}_S$, sendo este valor o limite, quando N tende para infinito, dos raios espectrais das matrizes A_N . \square

Como ficou dito no início, por razões de simplicidade acabámos de provar um resultado restrito a uma certa classe de sequências de amassamento aperiódicas. De seguida, vamos generalizar esse mesmo resultado para qualquer sequência aperiódica. Para tal, vejamos que não existem sequências de amassamento aperiódicas puramente infinitas.

Proposição 5.2. *Seja S uma sequência de amassamento puramente infinita. Então, S é uma sequência de amassamento periódica.*

Prova: Seja $S = S_1 S_2 \cdots$ uma sequência de amassamento quadrática puramente infinita. Então, por definição, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o inteiro $n > N$, nenhuma das sequências $S^n = S_1 S_2 \cdots S_n C$ é uma sequência admissível. Por outras palavras, existe um inteiro N a partir do qual todas as sequências S^n falham as duplas desigualdades

$$S_2 S_3 \cdots S_n C \preceq \sigma^{k-1}(S_1 S_2 \cdots S_n C) \preceq S_1 S_2 \cdots S_n C, \quad (5.9)$$

para algum $k = 1, 2, \dots, n$.

Fixemos então $n > N$ e seja k um inteiro tal que

$$S_k S_{k+1} \cdots S_n C \succ S_1 S_2 \cdots S_n C. \quad (5.10)$$

Contudo, por hipótese, sabemos que, sendo S uma sequência de amassamento, é válida a desigualdade

$$S_k S_{k+1} \cdots S_n S_{n+1} \cdots \preceq S_1 S_2 \cdots. \quad (5.11)$$

Como facilmente se percebe, a conjugação das duas desigualdades (5.10) e (5.11) vai permitir-nos concluir que

$$S_k S_{k+1} \cdots S_n = S_1 S_2 \cdots S_{n-k}, \quad (5.12)$$

uma vez que só pode ser o símbolo seguinte, C para a primeira e S_{n+1} para a segunda, que vai levar a comparações totalmente distintas com o símbolo S_{n-k+1} . Note-se que,

caso admitíssemos ser a primeira das desigualdades de (5.9) a ser não válida, chegaríamos à conclusão que

$$S_k S_{k+1} \cdots S_n = S_2 S_3 \cdots S_{n-k}. \quad (5.13)$$

Passemos agora à sequência S^{n+1} , sequência que sabemos de antemão ser não admissível, admitindo verdadeira a igualdade (5.12). Naturalmente, não podemos assumir *a priori* que a subsequência $\sigma^{k-1}(S^{n+1})$ não esteja enquadrada pela desigualdade

$$S_2 S_3 \cdots S_n S_{n+1} C \preceq \sigma^{k-1}(S_1 S_2 \cdots S_n S_{n+1} C) \preceq S_1 S_2 \cdots S_n S_{n+1} C.$$

Mas, pelos argumentos atrás apresentados, podemos concluir de imediato que, caso a dupla desigualdade não seja válida, teremos a igualdade simbólica

$$S_k S_{k+1} \cdots S_n S_{n+1} = S_1 S_2 \cdots S_{n-k} S_{n-k+1}.$$

Sendo assim, vamos assumir que $\sigma^{k-1}(S^{n+1})$ satisfaz a dupla desigualdade

$$S_2 S_3 \cdots S_n S_{n+1} C \preceq S_k S_{k+1} \cdots S_n S_{n+1} C \preceq S_1 S_2 \cdots S_n S_{n+1} C. \quad (5.14)$$

De seguida, vamos ter necessidade de analisar separadamente duas situações:

- seja $\rho(S_k \cdots S_n) = +1$;

então, por (5.10), podemos concluir que $S_{n-k+1} = L$, ou seja, por (5.12), temos que a segunda das desigualdades em (5.14) estabelece afinal apenas uma comparação entre as sequências

$$S_{n+1} C \preceq L S_{n-k+2},$$

da qual se retira imediatamente que o símbolo S_{n+1} tem necessariamente que ser igual a L , ou seja, que $S_{n+1} = S_{n-k+1}$.

- seja $\rho(S_k \cdots S_n) = -1$;

então, também por (5.10), temos que $S_{n-k+1} = R$. Deste modo, a igualdade (5.12) implica imediatamente que a segunda das desigualdades em (5.14) é equivalente a

$$S_{n+1} C \succ R S_{n-k+2},$$

só possível caso o símbolo S_{n+1} seja igual a R , ou seja, se $S_{n+1} = S_{n-k+1}$.

Desta forma, acabámos de mostrar que, admitindo a igualdade (5.12), também o símbolo seguinte, S_{n+1} , será igual ao que precede a subsequência inicial, S_{n-k+1} , em (5.12). Como se verifica facilmente, os mesmos argumentos permitem chegar a idêntica conclusão caso tenhamos como verdadeira a igualdade (5.13). Ora, como a partir de (5.10) se retira que $k > 2$, temos que a sequência de amassamento puramente infinita S terá forçosamente que ser periódica, muito embora não necessariamente de período k . \square

Como consequência imediata da Proposição 5.2, podemos afirmar que nenhuma sequência de amassamento aperiódica é puramente infinita. Por outras palavras, fica estabelecido o seguinte resultado.

Corolário 5.1. *Seja S uma sequência de amassamento e denotemos por \mathbb{N}_S o conjunto dos índices n tais que as subsequências S^n são sequências admissíveis. Então, se S é uma sequência de amassamento aperiódica, temos que o conjunto \mathbb{N}_S é isomorfo a \mathbb{N} .*

Por definição, o conjunto \mathbb{N}_S de uma sequência de amassamento aperiódica aproximadamente finita é igual a \mathbb{N} excepto um subconjunto finito inicial,

$$\mathbb{N}_S = \mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}.$$

Recordando a prova do Teorema 5.3, estabelecido para sequências de amassamento aperiódicas aproximadamente finitas, foi exactamente essa possibilidade de elementos de \mathbb{N}_S serem arbitrariamente grandes que nos permitiu considerar o caso finito e avaliar o limite quando o comprimento da sequência S^n tomava valores arbitrariamente elevados. Assim sendo, o Corolário 5.1 permite-nos concluir que a prova da generalização do Teorema 5.3 para quaisquer sequências de amassamento aperiódicas segue trivialmente a prova anterior. Por outras palavras, que do Corolário 5.1 e da prova do Teorema 5.3 se retira que é válido o seguinte resultado.

Teorema 5.4. *Seja S uma sequência de amassamento quadrática aperiódica. Então,*

temos que

$$1/\zeta_S(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n z^n,$$

com $\epsilon_n = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_n$, e onde por ε_k se denotam os símbolos de amassamento associados a cada um dos símbolos S_k que compõem a sequência S .

Com este resultado, podemos concluir ser válida a generalização da expressão conhecida para o caso finito para toda a família de invariantes de amassamento das aplicações quadráticas no intervalo.

De seguida, vamos explorar um resultado obtido para a família das transformações β no intervalo, trazendo-o para o contexto das matrizes de transição. Nessa passagem vai ser fundamental um resultado do mesmo tipo daquele acima obtido.

5.3 Taxa de *mixing* para a família das transformações β no intervalo

Nesta secção vamos perceber de que modo um resultado análogo ao anteriormente obtido para a família das aplicações quadráticas no intervalo pode ser utilizado para provar um teorema que estabelece um facto muito interessante e inesperado à cerca da dinâmica das transformações β no intervalo.

Em 2005, Sara Fernandes e Sousa Ramos, ver [41] e [42], estudaram as propriedades do segundo valor próprio da matriz de transição de aplicações quadráticas e cúbicas no intervalo e usaram esse valor próprio para estimar a taxa de *mixing* dessas dinâmicas, isto é, conseguiram obter uma relação onde é visível o significado dinâmico para esse segundo valor próprio da matriz de transição de Markov. Vejamos em que consiste esse resultado.

Dada uma qualquer aplicação de Markov no intervalo f , linear por pedaços, com declive constante $s > 1$ em cada um dos intervalos da partição de Markov, é possível estimar a taxa de decaimento das correlações a partir dos módulos dos dois maiores valores próprios da matriz de transição da dinâmica. De facto, denotando por A_f a matriz de transição de Markov de f e por λ_2, λ_1 os dois maiores valores próprios, em

módulo, da matriz A_f , é possível mostrar o seguinte resultado:

1. se $|\lambda_2| > 1$, assiste-se a um declínio exponencial das correlações com uma taxa menor ou igual a $\frac{|\lambda_2|}{\lambda_1}$;
2. se $|\lambda_2| \leq 1$, tem-se também um declínio exponencial das correlações, mas desta vez com uma taxa menor ou igual a $\frac{1}{\lambda_1}$.

Observação 5.1. *Lembremos que, para as dinâmicas consideradas acima, o valor próprio λ_1 é exactamente igual ao número de crescimento s , isto é, que $h_{\text{top}}(f) = \log \lambda_1$.*

Querendo estudar o modo como o segundo valor próprio varia, em módulo, com o parâmetro que define a família das quadráticas no intervalo, Sara Fernandes e Sousa Ramos deparam-se com um conjunto de valores deveras *estranho* (núvens) que parecem rejeitar, partindo então para a procura de resultados parcelares, estudando a convergência de λ_2 ao longo da árvore dos invariantes de amassamento, escolhendo vértices da árvore correspondentes a invariantes de amassamento infinitos e indo estudar a sequência de valores de λ_2 determinada por caminhos sobre a árvore que levam ao invariante escolhido inicialmente.

O trabalho que apresentamos nesta secção pretende de alguma forma sugerir que talvez a ideia de núvem para o gráfico encontrado para a variação de λ_2 com o parâmetro não seja um problema, mas sim uma indicação de uma não existência de regularidade. Aquilo que vamos fazer é mostrar que, para a família das transformações β no intervalo, essa variação está muito longe de mostrar um comportamento regular. Nesse sentido, talvez a variação para a família das quadráticas no intervalo também tenha algumas dessas características e, portanto, a ideia de regularidade esteja fora de causa. Para tal, vamos começar por expor os resultados de Leopold Flatto, Jeffrey C. Lagarias e Bjorn Poonen, [70], os quais procuraremos mais tarde interpretar com a ajuda das matrizes de transição de uma Cadeia de Markov Topológica.

Seja f_β uma transformação β no intervalo, para $1 < \beta < 2^1$. Denotemos por $L_\beta(z)$

¹Na realidade, os resultados de Flatto, Lagarias e Poonen são estabelecidos para quaisquer valores de β superiores a 1.

a série de potências formal

$$L_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n z^n,$$

onde o coeficiente L_n conta o número de voltas, isto é, o número de subintervalos de monotonia, da transformação f_β^n .

Como sabemos, a função $\zeta_\beta(z)$ da transformação f_β é construída a partir do número de pontos fixos, P_n de f_β^n , mas, neste caso, atendendo à forma das aplicações, é perfeitamente compreensível que estes dois números estejam relacionados. Assim sendo, não é de todo surpreendente que exista uma relação entre a série de potências $L_\beta(z)$ e $\zeta_\beta(z)$.

Proposição 5.3. *Dada uma transformação β no intervalo, temos que*

$$\zeta_\beta(z) = (1 - z) L_\beta(z).$$

Como é óbvio, esta relação tem como consequência que ambas as funções ζ_β e L_β partilhem os mesmos pólos dentro do círculo unitário do plano complexo. É esta igualdade que vai permitir enunciar alguns resultados relativamente ao raio do segundo menor pólo da função $\zeta_\beta(z)$, caso este pertença ao referido disco unitário.

Dada uma qualquer transformação β no intervalo, seja M_β o raio do segundo menor pólo da função $\zeta_\beta(z)$, se ele existir, e coloquemos $M_\beta = 1$ no caso em que tal pólo não exista, ou seja, não exista um segundo pólo no interior do círculo unitário.

Observação 5.2. *A importância desta quantidade M_β resulta, em boa parte, no modo como permite estabelecer uma estimativa assintótica para o número P_n de pontos fixos de f_β^n ,*

$$P_n = \beta^n + O((M_\beta^{-1} + \varepsilon)^n), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Se tentarmos desenhar um gráfico para M_β , com β tomando valores no intervalo $(1, 2)$, veremos imediatamente que esta variação é completamente distinta da variação do menor dos pólos, que sabemos ser exactamente igual a $1/\beta$.

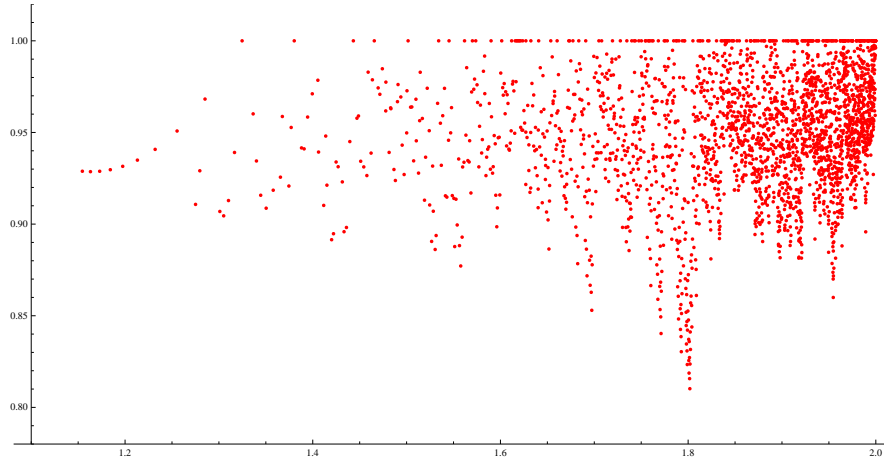


Figura 5.1: Variação de M_β , para $1 < \beta < 2$.

É evidente que a primeira surpresa que este gráfico nos mostra é modo surpreendentemente brusco como M_β varia. Mas, uma vez assimilado esse tipo de comportamento, salta à vista a forma suave para M_β no início do intervalo. Esse facto, desde logo estudado por Flatto, Lagarias e Poonen, pode ser visualizado no seguinte pormenor.

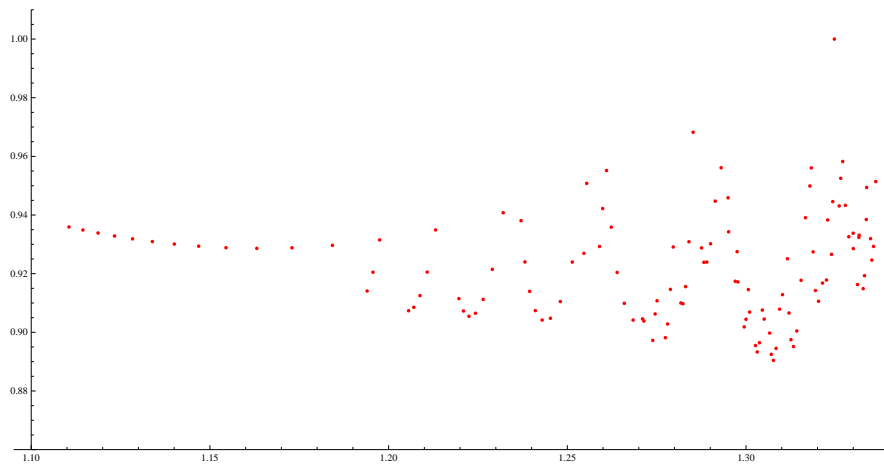


Figura 5.2: Pormenor da variação de M_β , para $1 < \beta < 1.35$.

O estudo deste fenómeno, isto é, do pequeno troço inicial onde M_β apresenta um comportamento suave, realizado por Flatto, Lagarias e Poonen, é um estudo analítico. Pensamos que será muito mais interessante, no sentido de ser possível encontrar mais algum detalhe, se esse estudo for feito em termos de dinâmica simbólica. Por outras palavras, estamos convictos que um estudo por métodos simbólicos permitirá estabelecer

com todo o rigor a partir de que valor de β deixará a variação de M_β de mostrar o comportamento suave.

O estudo da variação de M_β , feito por Flatto, Lagarias e Poonen, permitiu-lhes retirar a seguinte conclusão.

Teorema 5.5. *A função M_β é contínua, para $1 < \beta < 2$.*

Vemos assim que, apesar da forma brusca que se observa para a variação de M_β , a regularidade registada na continuidade desse comportamento é ainda válida.

Após esta apresentação do trabalho de Flatto, Lagarias e Poonen, só nos resta fazer a ligação com as matrizes de transição de Markov, para desse modo recuperarmos as ideias de Sara Fernandes e Sousa Ramos. Mas essa ligação é imediata, isto é, toda a argumentação apresentada na secção anterior que permitiu estabelecer uma relação entre a função zeta das aplicações quadráticas no intervalo e o determinante das correspondentes matrizes de transição de Markov, é válida para a família das transformações β no intervalo, para $1 < \beta < 2$. Para tal, devemos apenas recordar o formalismo da matriz Θ referente a esta família de aplicações no intervalo e perceber que os resultados anteriores, para matrizes de transição de dimensão infinita, resultam igualmente verdadeiros. Deste modo, podemos afirmar que a quantidade M_β , introduzida por Flatto, Lagarias e Poonen, pode ser vista em termos do segundo menor valor próprio, em módulo, da matriz de transição de Markov da dinâmica f_β . Parece-nos assim evidente que, por uma analogia algébrica, talvez a variação da taxa de declínio exponencial das correlações da família das aplicações quadráticas no intervalo nos revelem ainda algumas surpresas, sendo por isso muito importante continuar esse estudo.

Bibliografia

- [1] J. Aaronson. Rational ergodicity and a metric invariant for Markov shifts. *Israel J. Math.*, 27(2):93–123, 1977.
- [2] R.L. Adler. Symbolic dynamics and Markov partitions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 35(1):1–56, 1998.
- [3] R.L. Adler, A.G. Konheim, and M.H. MacAndrew. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114:309–319, 1965.
- [4] J.F. Alves, R. Hric, and J. Sousa Ramos. Topological entropy, homological growth and zeta functions on graphs. *Nonlinearity*, 18:591–607, 2005.
- [5] V. Baladi. Infinite kneading matrices and weighted zeta functions of interval maps. *J. Functional Analysis*, 128:226–244, 1995.
- [6] V. Baladi. Periodic orbits and dynamical spectra. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 18:255–292, 1998.
- [7] V. Baladi and D. Ruelle. An extension of the theorem of Milnor and Thurston on the zeta functions of interval maps. *Ergod. Theory & Dynam. Sys.*, 14:621–632, 1994.
- [8] J. Belissard. Gap labelling theorems for Schrodinger operators. In M. Waldschmidt, P. Moussa, J.M. Luck, and C. Itzykson, editors, *From Number Theory to Physics*, pages 538–630. Springer-Verlag, 1992.
- [9] B. Blackadar. *K-theory for Operator Algebras*, volume 5 of *MSRI Monographs*. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1986.

- [10] R. Bowen. Markov partitions for axiom A diffeomorphisms. *Amer. J. Math.*, 92:725–747, 1970.
- [11] R. Bowen. *On Axiom A diffeomorphisms*, volume 35 of *Regional Conference Series in Mathematics*. AMS, Providence, Rhode Island, 1978.
- [12] R. Bowen and J. Franks. The periodic points of maps of the disc and the interval. *Topology*, 15:337–342, 1976.
- [13] R. Bowen and J. Franks. Homology for zero dimensional basic sets. *Ann. of Math.*, 106:73–92, 1977.
- [14] M. Boyle, J. Buzzi, and R. Gomes. Almost isomorphism for countable state Markov shifts. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*.
- [15] M. Boyle and D. Handelman. Algebraic shift equivalence and primitive matrices. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 336:121–149, 1993.
- [16] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge Press, 2003.
- [17] H. Broer and F. Takens. *Dynamical Systems and Chaos*. Epsilon, Uitgaven, 2004.
- [18] H. Bruin. Combinatorics of the kneading map. *Int. Jour. of Bifur. and Chaos*, 5:1339–1349, 1995.
- [19] L.A. Bunimovich, S.G. Dani, R.L. Dobrushin, M.V. Jakobson, I.P. Kornfeld, N.B. Maslova, Ya.B. Pesin, Ya.G. Sinai, J. Smillie and Yu.M. Sukhov, and A. M. Vershik. *Dynamical Systems, Ergodic Theory and Applications*, volume 100 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 2000.
- [20] J. Buzzi and O. Sarig. Uniqueness of equilibrium measures for countable Markov shifts and multi-dimensional piecewise expanding maps. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 23:1383–1400, 2001.

- [21] P. Collet and J.-P. Eckmann. *Iterated Maps of the Interval as Dynamical Systems*. Birkhauser, 1981.
- [22] P. Collet, J.P. Crutchfield, and J.-P. Eckmann. Computing the topological entropy of maps. *Commun. Math. Phys.*, 88:257–261, 1983.
- [23] C. Correia Ramos. *Representações , Álgebras C^* e Transformações do Intervalo*. Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, 2006.
- [24] E. Coven and Z. Nitecki. On the genesis of symbolic dynamics as we know it. *Colloquium Mathematicum*, 110, 2008.
- [25] J. Cuntz. Simple C^* -algebras generated by isometries. *Commun. Math. Phys.*, 57:173–185, 1977.
- [26] J. Cuntz. A class of C^* -algebras and topological Markov chains II: Reducible chains and the *Ext*-functor for C^* -algebras. *Invent. Math.*, 63:25–40, 1981.
- [27] J. Cuntz. K-theory for certain C^* -algebras. *Ann. of Math.*, 113:181–197, 1981.
- [28] J. Cuntz and W. Krieger. A class of C^* -algebras and topological Markov chains. *Invent. Math.*, 56:251–268, 1980.
- [29] J. Cuntz and W. Krieger. Topological Markov chains with dicyclic dimension groups. *J. für Reine und Angew. Math.*, 320:44–51, 1980.
- [30] K. R. Davidson. *C^* -algebras by example*. Fields Institute Monographs. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1996.
- [31] W. de Melo and S. van Strien. *One-Dimensional Dynamics*. Springer-Verlag, 1993.
- [32] M. Dellnitz, G. Froyland, and S. Sertl. On the isolated spectrum of the Perron-Frobenius operator. *Nonlinearity*.
- [33] B. Derrida, A. Gervois, and Y. Pomeau. Iterations of endomorphisms of the real axis and representations of numbers. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, A XXIX:305–356, 1978.

- [34] R. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1987.
- [35] A. Douady. Topological entropy of unimodal maps: monotonicity for quadratic polynomials. In B. Branner and P. Hjorth, editors, *Real and Complex Dynamical Systems*, pages 1–8, Dordrecht, 1995. Kluwer.
- [36] A. Douady and J. Hubbard. Etude dynamique des polynômes quadratiques complexes I. *Publ. Mat. d'Orsay*, 1984.
- [37] A. Douady and J. Hubbard. Etude dynamique des polynômes quadratiques complexes II. *Publ. Mat. d'Orsay*, 1985.
- [38] R. Exel and M. Laca. The K-theory of Cuntz-Krieger algebras for infinite matrices. *K-Theory*.
- [39] R. Exel and M. Laca. Cuntz-Krieger algebras for infinite matrices. *Journal Reine Angew. Math*, 512, 1999.
- [40] A. Fathi and M. Shub. Some dynamics of pseudo-anosov diffeomorphisms. *Asterisque*, 66-67:181–207, 1979.
- [41] S. Fernandes. *Teoria Espectral e Sistemas Dinâmicos Discretos*. Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa, 2005.
- [42] S. Fernandes and J. Sousa Ramos. Second eigenvalue of transition matrix associated to iterated maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, 31:316–326, 2007.
- [43] L. Flatto. Z -numbers and β -transformations. *Contemporary Mathematics*, 135:181–201, 1992.
- [44] L. Flatto and J.C. Lagarias. The lap-counting function for linear mod one transformations I: explicit formulas and renormalizability. *Ergod. Th. & Dynam. Syst.*, 16:451–491, 1996.

- [45] L. Flatto and J.C. Lagarias. The lap-counting function for linear mod one transformations II: the Markov chain for generalized lap numbers. *Ergod. Th. & Dynam. Syst.*, 17:123–146, 1997.
- [46] L. Flatto and J.C. Lagarias. The lap-counting function for linear mod one transformations III: the period of a Markov chain. *Ergod. Th. & Dynam. Syst.*, 17:369–403, 1997.
- [47] L. Flatto and J.C. Lagarias. The lap counting function and zeta function of the tent map. *Nonlinearity*, 13, 2000.
- [48] J. Franks. Flow equivalence of subshifts of finite type. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 4:53–66, 1984.
- [49] F. Gantmacher. *Matrizentheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [50] I. Gohberg, S. Goldberg, and N. Krupnik. *Traces and Determinants of Linear Operators*, volume 116 of *Operator Theory – Advances and Applications*. Birkhäuser, Basel, 2000.
- [51] J. Guckenheimer. On the bifurcation of maps of the interval. *Inventiones math.*, 39:165–178, 1977.
- [52] J. Guckenheimer. Sensitive dependence on initial conditions for one-dimensional maps. *Commun. Math. Phys.*, 70:133–160, 1979.
- [53] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, volume 42 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [54] J. Guckenheimer, J. Moser, and S. Newhouse. *Bifurcation of Dynamical Systems*. Birkhäuser, Boston, 1980.
- [55] B. Gurevich. Stably recurrent nonnegative matrices. *Russian Math. Surveys*, 51(3):551–552, 1996.

- [56] B. Gurevich and S. Savchenko. Thermodynamic formalism for countable symbolic Markov chains. *Russian Math. Surveys*, 53(2):245–334, 1998.
- [57] P. Holmes. Ninety plus thirty years of nonlinear dynamics: less is more and more is different. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15:2703–2716, 2005.
- [58] D. Huang. Flow equivalence of reducible shifts of finite type. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 1:159–178, 1981.
- [59] A. Huef and I. Raeburn. The ideal structure of Cuntz-Krieger algebras. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 17:611–624, 1997.
- [60] Y. Katayama, K. Matsumoto, and Y. Watatani. Simple C^* -algebras arising from β -expansion of real numbers. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 18:937–962, 1998.
- [61] A. Katok. Fifty years of entropy in dynamics: 1958-2007. *Journal of Modern Dynamics*, 1:545–596, 2007.
- [62] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge Univ. Press, 1995.
- [63] K. H. Kim and F. W. Roush. William’s conjecture is false for reducible subshifts. *J. Amer. Math. Soc.*, 5:213–215, 1992.
- [64] K.H. Kim and F. Roush. Decidability of shift equivalence. In *Proceedings of Maryland Special Year in Dynamics 1986-87*, volume 1342 of *Lecture Notes in Math.*, pages 374–424. Springer-Verlag, 1988.
- [65] K.H. Kim and F. Roush. The William’s conjecture is false for irreducible subshifts. *Ann. of Math.*, 149:545–558, 1999.
- [66] B.P. Kitchens. *Symbolic Dynamics: One-sided, Two-sided and Countable State Markov Shifts*. Springer-Verlag, 1998.
- [67] A.N. Kolmogorov and S. Fomin. *Elementos de la teoria de funciones e del analisis*.

- [68] W. Krieger. On dimension functions and topological Markov chains. *Invent. Math.*, 56:239–250, 1980.
- [69] A. Kumjian, D. Pask, and I. Raeburn. Cuntz-Krieger algebras of directed graphs. *Pacific J. Math.*, 184(1):161–174, 1998.
- [70] J. Lagarias L. Flatto and B. Poonen. The zeta function of the beta transformation. *Ergod. Th. & Dynam. Syst.*, 14:237–266, 1994.
- [71] J P. Lampreia, R. Severino, and J. Sousa Ramos. Irreducible complexity of iterated symmetric bimodal maps. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 1:69–85, 2005.
- [72] J.P. Lampreia, A. Rica da Silva, and J. Sousa Ramos. Subtrees of the unimodal map tree. *Boll U.M.I. Ana. Fun. e Appl. ser. VI*, VC(1):159–167, 1986.
- [73] J.P. Lampreia, A. Rica da Silva, and J. Sousa Ramos. Tree of Markov topological chains. *CFMC-E4/84*, 1984.
- [74] N.P. Landsman. Lecture notes on C^* -Algebras and K-Theory, 2003.
- [75] A. Lasota and M.C. Mackey. *Chaos, Fractals, and Noise*, volume 97 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New-York, 2nd edition, 1994.
- [76] D. Lind and B. Marcus. *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge Univ. Press, 1995.
- [77] C. R. MacClauer. The many proofs and applications of perron’s theorem. *SIAM Review*, 42:487–498, 2000.
- [78] N. Martins. *K-Teoria das Álgebras de Cuntz-Krieger Associadas a Iteradas do Intervalo*. Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa, 2002.
- [79] N. Martins, R. Severino, and J. Sousa Ramos. Bowen-Franks groups for bimodal matrices. *Journal of Difference Equations and Application, Special issue on the occasion of the 65th birthday of A. N. Sharkovsky*, 9(3/4):423–433, 2003.

- [80] N. Martins, R. Severino, and J. Sousa Ramos. K-theory for Cuntz-Krieger algebras arising from real quadratic maps. *Int. Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 34:2139–2146., 2003.
- [81] N. Martins, R. Severino, and J. Sousa Ramos. Bowen-Franks groups associated with iterated maps on the interval. In *Proc. European Conference on Iteration Theory ECIT2002*, volume 346, pages 271–282. Grazer Mathematische Berichte, 2004.
- [82] N. Martins, R. Severino, and J. Sousa Ramos. Bowen-Franks groups of reducible bimodal subshifts of finite type. *Linear Algebra and its Applications*, 414:125–137, 2006.
- [83] K. Matsumoto. On C^* -algebras associated with subshifts. *Internat. J. Math.*, 8:357–374, 1997.
- [84] K. Matsumoto. K -theory for C^* -algebras associated with subshifts. *Math. Scand.*, 82:237–255, 1998.
- [85] R. May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261:459–466, 1976.
- [86] D. Mayer. On a ζ function related to the continued fraction transformation. *Bulletin de la SMF*, 104:195–203, 1975.
- [87] D. Mayer. *Continued fractions and related transformations*. Ergodic Theory, Symbolic Dynamics and Hyperbolic Spaces. Oxford University Press, Oxford, 1991.
- [88] M. Metropolis, M.L. Stein, and P.R. Stein. On the finite limit sets for transformations of the unit interval. *J. Combin. Theory*, 15:25–44, 1973.
- [89] J. Milnor and W. Thurston. On iterated maps of the interval. In *Dynamical Systems. Proc. Univ. Maryland 1986-87*, pages 465–563. Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, 1988.

- [90] J. Milnor and C. Tresser. On entropy and monotonicity for real cubic maps. *Stony Brook, IMS Preprint #1998/9*, August, 1998.
- [91] C. Mira. *Chaotic Dynamics*. World Scientific, 1987.
- [92] M. Misiurewicz. Horseshoes for mappings of the interval. *Bull. Acad. Pol. Ser. Sci. Math.*, 27:167–169, 1979.
- [93] M. Misiurewicz and W. Szlenk. Entropy of piecewise monotone mappings. *Studia Math.*, 67:45–63, 1980.
- [94] M. Morse and G.A. Hedlund. Symbolic dynamics. *Amer. J. Math.*, 60:815–866, 1938 (??).
- [95] G. J. Murphy. *C^* -algebras and Operator Theory*. Academic Press, London, 1990.
- [96] W. Parry. On the beta-expansions of real numbers. *Acta Math, Acad. Sci. Hung.*, 11:401–416, 1960.
- [97] W. Parry. An analogue of the prime number theorem for closed orbits of shifts of finite type and their suspensions. *Israel J. Math.*, 45:41–52, 1983.
- [98] W. Parry and M. Pollicott. Zeta function and the periodic orbit structure of hyperbolic dynamics. *Asterisque*, 268:187–188, 1990.
- [99] W. Parry and D. Sullivan. A topological invariant for flows on one-dimensional spaces. *Topology*, 14:297–299, 1975.
- [100] W. Parry and S. Tuncel. On the classification of Markov chains by finite equivalence. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 1:303–335, 1981.
- [101] W. Parry and S. Tuncel. *Classification Problems in Ergodic Theory*. LMS Lecture Note Series 07, Cambridge Univ. Press, 1982.
- [102] D. Pask and I. Raeburn. On the K-theory of Cuntz-Krieger algebras. *Publ RIMS, Kyoto Univ.*, 32:415–443, 1996.

- [103] A. Pietsch. *Eigenvalues and s-Numbers*. Akademische Verlagsgesellschaft, 1987.
- [104] M. Pollicott. Meromorphic extensions of generalised zeta functions. *Invent. math.*, 85:147–164, 1986.
- [105] M. Pollicott and M. Yuri. *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, volume 40 of *London Mathematical Society Students Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [106] C. Preston. What you need to know to knead. *Advances in Math.*, 78:192–252, 1989.
- [107] M. Raghunathan. Mathematics - its place and role in our society. *Currente Science*, 84:285–290, 2003.
- [108] C. Ramos. *Representações, álgebras e transformações do intervalo*. Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa, 2006.
- [109] A. Renyi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 8:477–493, 1957.
- [110] C. Robinson. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*. CRC Press, 1995.
- [111] J. L. Rocha and J. Sousa Ramos. On iterated maps of the interval with holes. *Journal of Difference Equations and Applications*, 9:319–335, 2003.
- [112] J. L. Rocha and J. Sousa Ramos. Computing topological and metric invariants. In *Proc. of Dynamical Systems and Applications*, pages 598–613, Antalya, Turkey, 2004.
- [113] J. L. Rocha and J. Sousa Ramos. Weighted kneading theory of one-dimensional maps with a hole. *IJMMS*, 38:2019–2038, 2004.
- [114] M. Rørdam. Classification of Cuntz-Krieger algebras. *K-theory*, 9:31–58, 1995.

- [115] D. Ruelle. *Dynamical Zeta Functions for Piecewise Monotone Maps of the Interval*, volume 4 of *CRM Monograph Series*. American Mathematica Society, Providence, Rhode Island, 1994.
- [116] D. Ruelle. Functional equation for dynamical zeta functions of Milnor-Thurston type. *Commun. Math. Phys.*, 175:63–88, 1996.
- [117] D. Ruelle. Dynamical zeta functions and transfer operators. *Notices of the AMS*, pages 887–895, 2002.
- [118] S. Ruelle. On the Vere-Jones classification and existence of maximal measures for countable topological Markov chains. *Pacific J. Math.*, 209(2):365–380, 2003.
- [119] I. A. Salama. Topological entropy and recurrence of countable chains. *Pacific J. Math.*, 134(2):325–341, 1988.
- [120] O. Sarig. Phase transition for countable Markov shifts. *Commun. Math. Phys.*
- [121] O. Sarig. Thermodynamic formalism for countable Markov shifts. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 19:1565–1593, 1999.
- [122] O. Sarig. Characterization of existence of Gibbs measures for countable Markov chains. *Proc. of AMS*, 131:1751–1758, 2003.
- [123] O. Sarig. Dynamical zeta functions for the renewal shift. *Dynamics of complex systems, RIMS Kokyuroku*, 2004.
- [124] A.N. Sarkovskii. Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. *Ukrain. Math. Zh.*, 16:61–71, 1964.
- [125] K. Schmidt. *Algebraic Ideas in Ergodic Theory*, volume 76. AMS-CBMS Reg. Conf., Providence, 1990.
- [126] R. Severino. *On the conjugacy problem for K-systems*. Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1967.

- [127] R. Severino. *Invariantes Topológicos e Algébricos em Sistemas Dinâmicos Discretos*. Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, 2000.
- [128] Ya. G. Sinai. Construction of Markov partitions. *Functional Analysis and its Applications*, 2:245–253, 1968.
- [129] Ya. G. Sinai. Markov partitions and C-diffeomorphisms. *Functional Analysis and its Applications*, 2:61–82, 1968.
- [130] Ya. G. Sinai. *Topics in Ergodic Theory*, volume 44 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.
- [131] D. Singer. Stable orbits and bifurcations of maps of the interval. *SIAM J. Appl. Math.*, 35:260–267, 1978.
- [132] J. Sousa Ramos. *Hiperbolicidade e Bifurcação em Sistemas Simbólicos*. Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, 1989.
- [133] P. Stefan. A theorem of sarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms on the real line. *Commun. Math. Phys.*, 54:237–248, 1977.
- [134] D. Vere-Jones. Ergodic theory of nonnegative matrices - I. *Pacific J. Math.*, 22(2):361–386, 1967.
- [135] D. Vere-Jones. Ergodic theory of nonnegative matrices - II. *Pacific J. Math.*, 26(3):601–620, 1968.
- [136] J. B. Wagoner. Strong shift equivalence theory and the shift equivalence problem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 36:271–296, 1999.
- [137] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.
- [138] N. E. Wegge-Olsen. *K-theory and C*-algebras*. Oxford University Press, New York, 1993.

- [139] R. F. Williams. Classification of subshifts of finite type. *Ann. of Math.*, 98:120–153, 1973. Errata.
- [140] S. Williams. Introduction to symbolic dynamics. In S. G. Williams, editor, *Symbolic Dynamics and its Applications: AMS Short Course*, volume 60 of *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*. AMS, San Diego, California, 2002.
- [141] P. Ashwin J. Duan X-C Fu, W. Lu. Symbolic representation of iterated maps. *Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Julius Schauder Centre*, 18:119–147, 2002.
- [142] L. S. Young. Entropy in dynamical systems. In Keller Greven and Warnecke, editors, *Entropy*. Princeton University Press, 2003.